

AZ 55. – egyben 27. nemzetközi – ORTVAY RUDOLF

FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI

2025. január 31. – február 10.

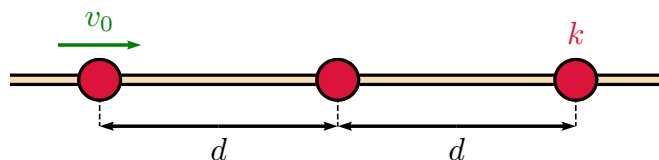
1. Képzeljünk el egy olyan világot, ahol a fényvisszaverődés törvénye nem egy fallal való tökéletesen rugalmas ütközésnek, hanem a fallal való *rugalmatlan* ütközésnek felel meg, k rugalmassági állandóval! Ebben a világban:

- Írjuk fel a fényvisszaverődés törvényét!
- Elemezzük a síktükör képalkotását!
- Tervezzünk periszkópot!

Mutassunk rá minél több különbségre és hasonlóságra a valódi és elképzelt világ tükroptikájában!

(Bihary Zsolt)

2. Vízszintes, súrlódásmentes rúdon három azonos tömegű, kis méretű gyöngy nyugszik az ábrán látható módon, egymástól azonos d távolságokban. Egy adott pillanatban a bal oldali gyöngynek v_0 nagyságú kezdősebességet adunk. Ezután a testek között rugalmatlan ütközések sorozata játszódik le, amelyek mindegyikét ugyanazon $0 < k < 1$ ütközési számmal jellemezhetjük.



- Hány ütközés történik összesen a stacionárius állapot beálltáig? Ábrázoljuk az ütközések számát a k paraméter függvényében!
- Vizsgáljuk meg a tökéletesen rugalmas $k \rightarrow 1$, illetve a tökéletesen rugalmatlan $k \rightarrow 0$ határeseteket! Visszakapjuk-e ekkor az elemi megfontolásokból származó eredményt, miszerint összesen két ütközés történik?

(Németh Róbert)

3. Tegyük meg azt a valós, de nem megengedhető feltevést, hogy autónkkal „levágjuk a kanyart”, azaz a sebesség növelése érdekében kanyarodás közben kis időre átmegyünk a szembejövő sávba! Az út ívének sugara r , a sáv szélessége s , és a menetirányunk a kanyar után α szöggel változik. Arányosan mennyi az az idő, amit ezzel nyerhetünk a sávban maradáshoz képest, miközben a gumik oldalirányú terhelését minkét esetben ugyanazon kicsúszás alatti szinten tartjuk?

Hogyan változik ez az arány, ha a pálya dőlésszöge a kanyarban β ?

Hány ezredmásodpercet nyerünk abban az esetben, ha az $r = 50$ m, $s = 3$ m, $\alpha = 60^\circ$ és $\beta = 5^\circ$, és a sebességünk abban az esetben, ha maradtunk volna a sávunkban, $v = 60$ km/h lett volna? Ennyiért megéri kockáztatni?

(Glöckler Oszvald)

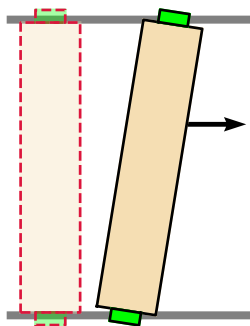
4. A XVIII. században Georges-Louis Le Sage azt feltételezte, hogy a gravitáció megmagyarázható hipotetikus részecskék ütközésével. Mivel két véges méretű anyagi test részben árnyékolja egymást az ütköző részecskék elől, ezért egy effektív vonzóerő jelenik meg közöttük. Ebben a feladatban vizsgáljuk a Nap–Föld rendszer mozgását ebben a modellben!

Írjuk le a hipotetikus részecskéket egy ideális gáz modellel, melynek szabad úthossza jóval nagyobb, mint a Nap–Föld távolság! A részecskék ütközését a gömb alakú Nappal és Földdel k ütközési állandó jellemzi. Dolgozzunk heliocentrikus világképben: a Nap legyen „rögzített”, a részecskék átlagsebessége a Nap vonatkoztatási rendszerében legyen nulla!

- a) Mekkora gravitációs erő hat egy a Naptól r távolságra elhelyezett nyugvó Földre?
 b) Hogyan mozogna ebben a modellben egy r távolságra elhelyezett, v kerületi sebességgel elindított Föld?

(Széchenyi Gábor)

5. Tekintsünk egy asztalfiókot, melynek egyik oldalán a görgő eltörött! Feltehető, hogy a fiók súrlódik, de nem tapad, valamint hogy a még működő görgőn a súrlódás elhanyagolható. A két görgő tengelye egy egyenesbe esik. A fiók súlya elhanyagolható.



A fiókot, a görgőket és a görgők sínjeit tekintsük merev testeknek! Feltehető, hogy a görgők és a sínek oldalai között igen kicsiny rés van. A görgők sínje, illetve a fiókot nyitó húzóerő x -irányú. A húzóerő tengelye nem feltétlenül megy át a tömegközépponton. A súrlódást modellezzük a súrlódás Coulomb-féle leírásával!

Írjuk le a fiók tömegközépponti mozgását akkor is, ha kezdetben nyugalomban volt, és akkor is, ha nem (ami annak felel meg, mint ha mozgás közben törött volna el a görgő)!

(Gombkötő Ákos)

6. Egy tömör, henger alakú tárgy sűrűsége a henger tengelyével párhuzamos irányban lineárisan változik. A henger egyik végén a sűrűség ρ_0 , a másik végén pedig ρ_1 . A henger alapjának sugara $R = 2$ cm, míg a hossza $L = 20$ cm. A tárgyat $\rho_v = 1000$ kg/m³ sűrűségű víz felszínére helyezzük. A felületi feszültség hatása elhanyagolható.

- a) Megfelelően megválasztott mérőszámok segítségével határozzuk meg a tárgy stabil egyensúlyi pozícióját, ha $\rho_0 = 100$ kg/m³ és $\rho_1 = 1300$ kg/m³! Számítsuk ki a stabil egyensúlyi pozíció körüli kis kitérésű rezgések frekvenciáit! A közegellenállást elhanyagolhatjuk.
 b) Hogyan válasszuk meg a ρ_0 és ρ_1 sűrűség értékeket, ha azt szeretnénk, hogy az átlagsűrűség $\rho_v/2$ legyen és stabil egyensúlyi pozícióban a henger forgástengelye és a vízfelszín által bezárt szög 2° legyen?

(Bácsi Ádám)

7. Egy háromdimenziós térben mozgó, \mathbf{r} helyvektorral és \mathbf{p} impulzusvektorral jellemezhető tömegpont Hamilton-függvénye

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = r \Phi(\mathbf{p}),$$

ahol $r = |\mathbf{r}|$ a helyvektor abszolút értéke, $\Phi(\mathbf{p})$ pedig az impulzusvektor valamilyen differenciálható függvénye.

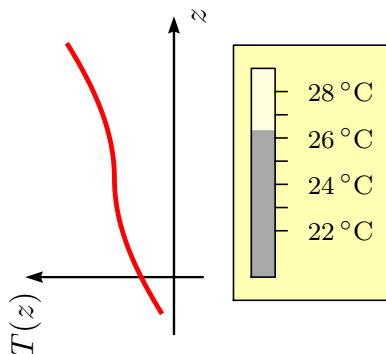
a) Vezessük le a tömegpont Hamilton-féle kanonikus egyenleteit! Keressünk megmaradó mennyiségeket! Ezek felhasználásával vezessünk le a tömegpont impulzustér-beli mozgására vonatkozó, a helykoordinátákat már nem tartalmazó másodrendű differenciálegyenletet!

Tanács: célszerű bevezetni az $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ és az $F = |\mathbf{F}|$ jelöléseket.

b) Legyen most $\Phi(\mathbf{p}) = k p_z$, ahol k adott állandó. Vezessük le és oldjuk meg analitikusan a tömegpont mozgásegyenleteit, azaz határozzuk meg az \mathbf{r} helyvektor és \mathbf{p} impulzusvektor összes komponensét az idő függvényében! (*Tanács:* ehhez az első lépésben célszerű a $w(t) = 1/p_z(t)$ függvényt kiszámítani)! Vázoljuk fel a különböző kezdőfeltételekhez illeszkedő mozgáspályákat!

(Dávid Gyula)

8. Egy szobában a hőmérséklet nem homogén, hanem magasságfüggő. A magasságfüggést egy ismert $z \mapsto T(z)$ függvény adja meg. Ebben a szobában megtalálható egy higanyos hőmérő, ahogyan azt az ábra mutatja.



- a) Mely egyenlet írja le, hogy egyensúlyban milyen értéket mutat a hőmérő?
 b) Milyen értéket mutat a hőmérő, ha hőmérsékletfüggést a $T(z) = T_0 + Az$ egyenlet írja le, valamilyen T_0 és A állandókkal?

A higanyoszlopban fellépő hőterjedést elhanyagolhatjuk. A higanyoszlopban z magasságban $T(z)$ hőmérséklet van. A lineáris hőtágulási együttható α .

(Veszeli Máté)

9. Egy közegben a hanghullámok izotrop módon, frekvenciától függetlenül $u < c$ sebességgel terjednek (ahol c a vákuumbeli fénysebesség).

a) Adjuk meg a hullám $\omega(\mathbf{k})$ diszperziós relációját a közeghez képest \mathbf{V} sebességgel mozgó megfigyelő szempontjából!

b) Oldjuk meg a feladatot abban az esetben is, ha a hullám a közegben az u határsebességű, Ω határfrekvenciájú Klein–Gordon-egyenletet elégíti ki!

(Dávid Gyula)

10. A $z < 0$ félteret tökéletesen merev anyag tölti ki, amelyben semmiféle rugalmas hullám nem tud terjedni. A $0 < z < h$ tartományban homogén izotrop rugalmas anyag helyezkedik el, melynek sűrűsége ρ_1 , Lamé-állandói λ_1 és μ_1 . A $z > h$ tartományt egy másik homogén izotrop anyag tölti ki, ρ_2 , λ_2 és μ_2 paraméterekkel. A $z = 0$ és a $z = h$ sík mentén a találkozó anyagokat összeragasztottuk.

a) A $z \rightarrow +\infty$ -ből a z -tengellyel ϑ szöget bezárva ω frekvenciájú, A_0 amplitúdójú longitudinális rugalmas síkhullám érkezik.

Számítsuk ki és ábrázoljuk a visszavert hullám(ok) amplitúdóját a beesési szög függvényében!

b) Számítsuk ki és ábrázoljuk a rétegre koncentrált, annak mentén terjedő hullám effektív egydimenziós diszperziós relációját!

A hullámok csillapodását hanyagoljuk el!

(Dávid Gyula)

11. Az egész teret betöltő homogén és izotrop rugalmas közegbe egy végtelen hosszú henger alakú üreget vágunk, amelyet egy másik, ugyancsak homogén és izotrop rugalmas anyaggal töltünk ki. Az érintkezésnél a két anyagot összeragasztjuk. A henger anyagában a longitudinális rugalmas hullámok terjedési sebessége kisebb, mint a hengeren kívül, a transzverzális hullámok sebessége viszont megegyezik.

A végtelenből longitudinális rugalmas síkhullám érkezik, melynek hullámvektora merőleges a henger tengelyére. A hullámhossz mindkét anyagban sokkal kisebb a henger átmérőjénél.

A behatolásnál a hullám megtörik, majd a hengeren áthaladva a felületet belülről újból elérve részben visszaverődik, részben megtörve kilép a hengerből.

Milyen kausztikákat hoznak létre a megtört és egyszer visszaverődött hullámok a hengeren belül? Adjuk meg a létrejövő kausztikák paraméteres egyenletét, és ábrázoljuk is a kausztikákat!

Megjegyzés: ha tovább követjük a hullámok útját a hengeren belül, a határfelületet elérve újabb visszaverődés, illetve törés következik. Ezekkel és a további hasonló jelenségekkel most ne foglalkozzunk!

(Dávid Gyula és Cserti József)

12. Tekintsünk egy végtelen hosszú, egydimenziós kristályt, amelynek azonos m tömegű atomjai között Morse-féle kölcsönhatás lép fel. A Lagrange-függvény alakja

$$L(\{x, \dot{x}\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{m\dot{x}_n^2}{2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} D [1 - e^{-\kappa(|x_n - x_m| - a)}]^2,$$

ahol D és κ pozitív paraméterek, továbbá a a kristály egyensúlyi helyzetét jellemző rácsállandó. Határozzuk meg a longitudinális rácsrezgések diszperziós relációját és a hangsebességet ebben a rendszerben!

(Dmitrij Zverevics)

13. Egy n törésmutatójú, gömb alakú testet párhuzamos, lineárisan polarizált fénynyalábbal világítunk meg. A gömb sugara sok nagyságrenddel nagyobb a fény hullámhosszánál.

a) A beeső fény energiájának hányad része verődik vissza? Adjuk meg a visszavert hányadot a törésmutató függvényében!

b) Számítsuk ki és ábrázoljuk a visszavert fény intenzitásának szögeloszlását két jelentősen különböző n törésmutató esetén!

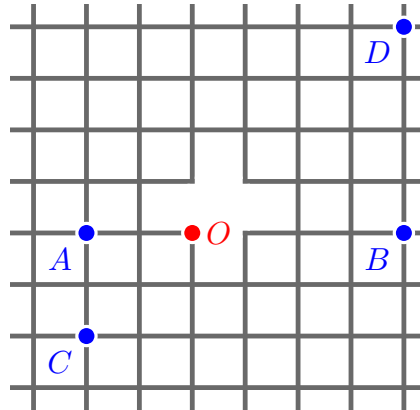
(Cserti József)

14. Tekintsünk két R sugarú, Q töltésű, földeletlen fémgömböt. Mekkora taszítóerő lép fel közöttük, ha középpontjaik $5R/2$ távolságra vannak egymástól?

(Széchenyi Gábor)

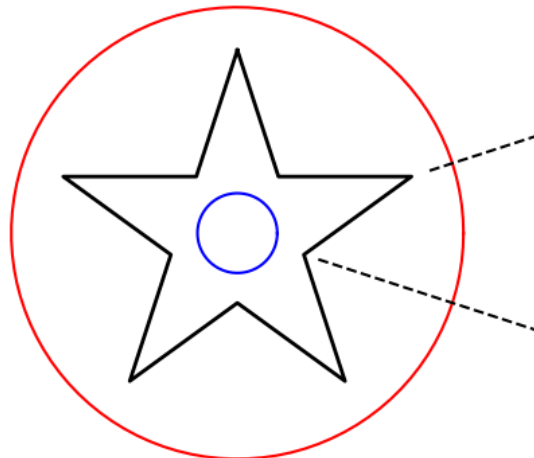
15. Egy végtelen négyzetrács minden éle azonos ellenállású. Ebből a perfekt ellenállás-hálózatból négy ellenállásélt eltávolítunk az alábbi ábrán látható módon.

Adjuk meg ebben a perturbált hálózatban az ellenállás analitikus alakját az O rácspont és a) az AB , illetve b) a CD egyenes szakasz minden egyes rácspontja között!



(Cserti József)

16. Az ábrán látható szabályos ötágú csillag alakú áramkeretben állandó erősségű egyenáram folyik.



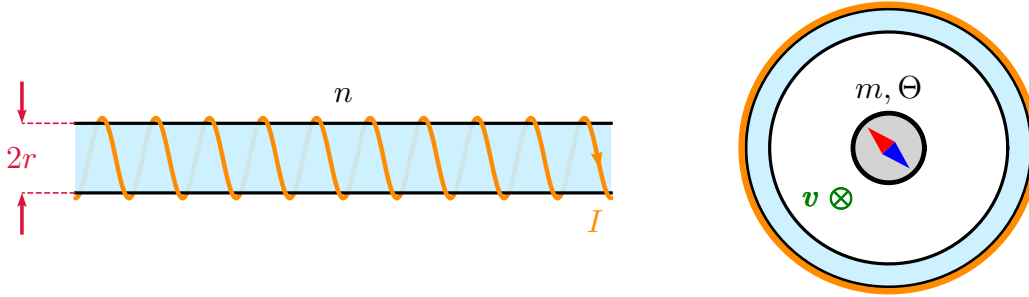
Az áramkeret síkjában egy mágneses dipólus helyezkedik el, melynek mágneses momentuma merőleges a síkra. Számítsuk ki a dipólusra ható a) erőt és b) forgatónyomatékat a dipólus helyének függvényében!

Ábrázoljuk a dipólusra ható erő vektorát egy a csillaggal koncentrikus kör pontjaiban, ha a kör c) a csillagon kívül (piros kör), d) a csillagon belül (kék kör) helyezkedik el!

e) Vizsgáljuk meg és ábrázoljuk a dipólusra ható erő nagyságát a csillag konvex, illetve konkáv csúcsain átmenő radiális egyenes mentén (szaggatott vonalak), a kerettől kis távolságból indulva a végtelenig! Határozzuk meg a kapott függvény aszimptotikus alakját!

(Cserti József)

17. Külső mágneses hatásoktól elszigetelt térrészben egy r sugarú, n egyenletes menetsűrűségű, igen hosszú szolenoidtekerccsel kísérletet végzünk. Áramát időben állandó I erősségen tartva a tekercs tengelyén egy arra merőleges síkú, m dipólmomentumú, Θ tehetetlenségi nyomatékú kicsiny iránytűt helyezünk el az ábrán látható módon. A kezdetben nyugvó testet egy adott pillanatban egyenletes, tengelyirányú sebességgel mozgatni kezdjük.



Azt tapasztaljuk, hogy amennyiben a sebesség rendkívül kicsi vagy pedig egy kritikus v_{krit} értékhez közeli, akkor a mágnesű jó közelítéssel egyenletes szögsebességgel forog körbe, minden egyéb esetben azonban bonyolult, nehezen karakterizálható mozgást végez. Magyarázzuk meg a jelenséget! Fejezzük ki a v_{krit} sebességet a megadott paraméterek segítségével és diszkutáljuk viselkedését az n menetsűrűség függvényében!

(Németh Róbert)

18. Egy S spinű kvantumrendszer \hat{H} Hamilton-operátora az $\hat{\mathbf{S}}$ spin-operátor \hat{S}_z komponensének nemlineáris, ám analitikus függvénye.

a) Adjuk meg Heisenberg-képben az $\hat{\mathbf{S}}$ spin-operátor $\hat{S}_x(t)$ és $\hat{S}_y(t)$ komponensét az idő függvényében!

Az $S = 1/2$, $S = 1$ és $S = 2$ esetekben adjuk meg explicit formában az $\hat{S}_x(t)$ és $\hat{S}_y(t)$ operátorok összes nem eltűnő mátrixelemét!

b) Egy bonyolultabb kvantumrendszer \hat{H} Hamilton-operátora az $\hat{\mathbf{S}}$ spin-operátor \hat{S}_z komponense mellett egy másik fizikai mennyiség \hat{A} operátorától is függ: $\hat{H} = \hat{H}(\hat{S}_z, \hat{A})$. Az \hat{A} operátor sajátértékei egyszerűek, számuk véges.

A szereplő operátorok felcserélési relációiról csak ennyit tudunk:

$$[\hat{H}, \hat{S}_z] = 0, \quad [\hat{H}, \hat{A}] \neq 0, \quad [\hat{S}_z, \hat{A}] = 0.$$

Térjünk át Heisenberg-képre! Adjuk meg az $\hat{\mathbf{S}}$ spin-operátor $\hat{S}_x(t)$ és $\hat{S}_y(t)$ komponensét az idő függvényében!

Tanácsok: Dolgozzunk az \hat{S}_z operátor m sajátértékeihez ($-S \leq m \leq S$) tartozó sajátaltérben! A számolás során használjuk a szokásos \hat{S}_+ és \hat{S}_- spin-léptető operátorokat! Első lépésként érdemes kiszámolni az \hat{S}_\pm operátorok és az \hat{S}_z tetszőleges $f(\hat{S}_z)$ analitikus függvényének kommutátorát. A számolás során legyen $\hbar = 1$.

(Dávid Gyula)

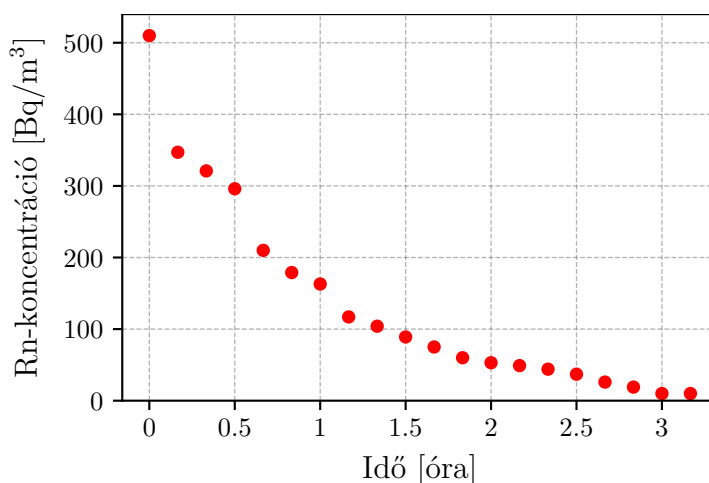
19. Az ábrán (és a szöveg utáni táblázatban) egy radonmérő műszer által mért adatok láthatóak az idő függvényében. A műszert napokig egy magas (510 Bq/m^3) radonkoncentrációjú szobában tartottuk, majd hirtelen kivittük a szabad levegőre, ahol a radonkoncentráció nagyon kicsi – ekkor kezdődött a mérés. Ahogy látható, a műszer által mutatott érték mégsem esett azonnal le.

Tegyük fel, hogy a műszer a radongázra nem, csak a leányaira érzékeny! Azt is tegyük fel, hogy a műszer vagy csak az alfa-, vagy csak a béta-bomlásokat érzékeli! Kérdések:

- Az alfa-, vagy a béta-bomlásokat érzékeli a műszer?
- Mi a detektálás relatív hatásfoka a két releváns leány-izotóp esetén?
- Mi a műszer érzékenysége, azaz hány darab jelet érzékel óránként egy 37 Bq/m^3 referencia radonkoncentráció esetén?
- A műszert napokig a szabad levegőn tartjuk, majd hirtelen visszatesszük ugyanabba a magas radontartamú szobába. Rajzoljuk le, hogy mi lesz a műszer által mutatott értékek időfüggése!

A 10 perces időintervallumokra átlagolt mérési adatok (Bq/m^3):

510, 347, 321, 296, 210, 179, 163, 117, 104, 89, 75, 60, 53, 49, 44, 37, 26, 19, 10, 10.



(Veres Gábor)

20. Egy izolált, kizárólag generalista fajokból álló ökoszisztéma mindössze egy termelő (növényi), illetve egy elsődleges fogyasztó (növényevők) és egy másodlagos fogyasztó (ragadozók) szintből áll. Mindenevők nincsenek jelen.

Az ökológusok nagy meglepetésére mind a termelői populáció, mind az elsődleges és másodlagos fogyasztói populációk konstans nagyságúak emberemlékezet óta (bár természetesen az egyes szinteken belüli fajok egyedszámainak arányai változhatnak), eltekintve esetleges lecsengő perturbációktól.

Azonban valaki véletlenül minden nap kis mennyiségű radioaktív anyagot szór szét az adott környezetben, ami enyhe halálozási arány növekedést okoz.

Feltételezhetjük, hogy a populációdinamika folytonos és determinisztikus, és a sugárzási többlet az alábbi módon módosítja:

$$\dot{N}_i = f(N_1, N_2, N_3) \quad \rightarrow \quad \dot{N}_i = f(N_1, N_2, N_3) - qN_i$$

ahol q azonos értékű minden ökológiai szint esetére. (N_i az egyes szintek egyedszámát jelöli.)

Hogyan változik a stabil egyensúlyi populáció a radioaktivitás hatására? Mekkora q effektív együtttható mellett szűnik meg az ökoszisztéma állapotának stabilitása?

(Gombkötő Ákos)

21. Egy m tömegű töltött részecskét kvázi-egydimenziós, időben változó elektrosztatikus potenciál segítségével csapdázva mozgatunk. A potenciálgödör alakja a folyamat során mindvégig változatlan és harmonikus, azonban minimumhelyét egy $t \mapsto x_0(t)$ folytonos függvény szerint hangoljuk, azaz

$$V(x, t) = \frac{m\omega^2}{2} [x - x_0(t)]^2,$$

ahol ω egy karakterisztikus körfrekvencia. Mindezt oly módon tesszük, hogy mind kezdetben, mind hosszú idő után a potenciálgödör nyugalomban van vagy egyenletes mozgást végez, azaz $\ddot{x}_0(t \leq 0) = \ddot{x}_0(t \rightarrow \infty) = 0$. Tudjuk továbbá, hogy a folyamat elején a részecskét az alapállapotban preparáltuk.

- a) Mekkora a valószínűsége, hogy a részecske a folyamat végén, hosszú idő után az aktuális alapállapotban található?
- b) Vizsgáljuk meg az *a)* feladatrészben kiszámított valószínűséget egy speciális esetben, egyenletesen gyorsuló mozgás mellett:

$$\ddot{x}_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 0, \\ a_0, & \text{ha } 0 < t \leq T, \\ 0, & \text{ha } t > T. \end{cases}$$

Értelmezzük az eredményt! Diszkutáljuk az $a_0 \rightarrow \infty, T \rightarrow 0$ határesetet is, amennyiben $a_0 T = v_0$ konstans értékű!

- c) Vizsgáljuk meg az *a)* feladatrészben kiszámított valószínűséget még egy speciális esetben, harmonikus rezgőmozgás mellett:

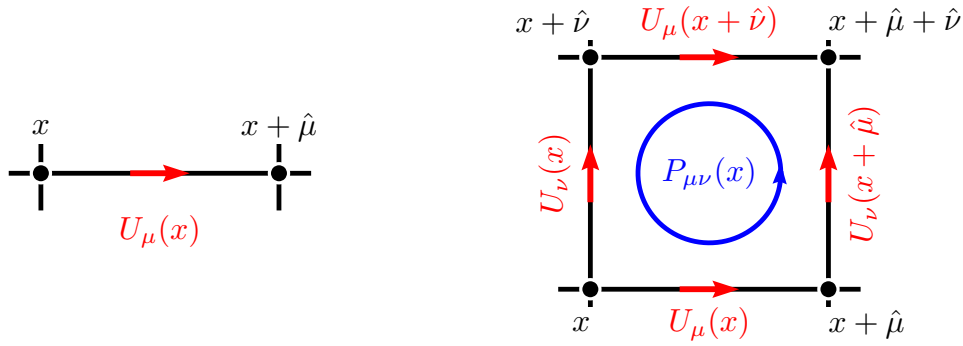
$$\ddot{x}_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 0, \\ a_0 \sin(\Omega t), & \text{ha } 0 < t \leq 2\pi N/\Omega, \\ 0, & \text{ha } t > 2\pi N/\Omega. \end{cases}$$

Értelmezzük az eredményt! Mi történik, ha $\Omega = \omega$? Diszkutáljuk az $N \rightarrow \infty$ határesetet is!

(Németh Róbert)

22. Világunkat mértékelméletekkel (*gauge theories*) szeretnénk leírni. Erre lehetőséget ad az adott elmélet pályaintegrálokkal való megfogalmazása, azonban a felírható integrálok végtelen dimenziósak lesznek. Ugyanakkor az elmélet ún. rácstérelméleti megfogalmazásával egy véges Λ téridőrács bevezetésének segítségével jól definiálttá és numerikusan kiszámolhatóvá tehetjük a pályaintegrálokat.

Mértékelméletekben az integrálási változóink a téridő minden pontjában definiált $U_\mu(x)$ mértékterek lesznek (ilyen pl. a fotontér a kvantum-elektrodinamikában). Rácstérelméletben az $U_\mu(x)$ változók a téridőrács élein élnek, és az adott elmélet mértékcsoportjának elemeiből vehetnek fel értékeket. Illusztráció az alábbi ábra bal oldalán. Az anyagi terek (mint pl. az elektron) a rácspontokban élnének, de velük a feladatban most nem foglalkozunk.



A QED mértékcsoportha az $U(1)$ Lie-csoport, a komplex fázisok csoportja, azaz $U_{\mu}(x) = e^{i\varphi} \in U(1)$, ahol φ egy valós szám a $[0, 2\pi)$ intervallumon. Diszkrétizáljuk az $U(1)$ csoportot, és helyettesítsük a $Z(N)$ csoporttal! A csoportelemek ekkor felírhatók mint $U_{\mu}(x) = e^{2\pi i n/N} \in Z(N)$, ahol $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Vegyük észre, hogy $Z(N \rightarrow \infty) = U(1)$!

A $Z(N)$ elméletben az euklideszi hatás

$$S[\{U\}] = -\beta \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ \mu < \nu}} \text{ReTr}[P_{\mu\nu}(x)],$$

ahol $\beta > 0$ a mértékcsatolás, a téridőindexek $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, és

$$P_{\mu\nu}(x) = U_{\mu}(x)U_{\nu}(x + \hat{\mu})U_{\mu}(x + \hat{\nu})^*U_{\nu}(x)^*$$

az ún. plakett (ahol $U_{-\mu}(x) = U_{\mu}(x - \hat{\mu})^*$), a legkisebb zárt hurok a rácsban: ld. a fenti ábra jobb oldalán. A „kalap” az adott irányba az egy rácspontnyi elmozdulást jelöli, míg a „csillag” a komplex konjugálást. Az x vektor a rácspontokat koordinátázza a rácsban: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

a) Implementáljunk egy számítógépes szimulációs kódot a kedvenc programozási nyelvünkön, amely a Metropolis–Hastings-algoritmus alapján szimulálja a tiszta $Z(N)$ elméletet 4D-ben egy M^4 db rácspontból álló rácsra! A valószínűségi sűrűségfüggvény $\propto e^{-S[\{U\}]}$. A rács szélén a határfeltétel legyen periodikus! A szimuláció bemeneti paramétereit közt mindenképp szerepeljen M , N és β !

b) A szimuláció közben minden 10. lépésben mérjük meg az átlagos plakettet a

$$\langle P \rangle = 1 - \frac{1}{6M^4} \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ \mu < \nu}} \text{ReTr}[P_{\mu\nu}(x)]$$

képlet alapján! Legyen $N \in [3, 10]$, és minden N -re $\beta \in [0.5, 4.5]$, valamint $M = 4$ (ha jó a számítógépünk processzora, akkor próbálkozhatunk nagyobb M értékkel is). Keressünk megfelelően finom felbontást β -ban! A $\langle P \rangle$ várható értéket a méréseink átlagaként kaphatjuk meg. A szimulációt indítsuk ún. *cold start*-ból: minden él legyen $U_{\mu}(x) = 1$ ($n = 0$)! Vegyük figyelembe, hogy a rendszerünknek először meg kell találnia az egyensúlyi állapotát, és emiatt a kezdeti szakaszt hagyjuk ki a várható érték kiszámításakor!

c) A tiszta $Z(N)$ mértékelméletben létezik egy $N = K$ küszöbérték, amely alatt két fázist, míg fölötte három fázist tudunk megkülönböztetni β változtatásával. A fázisátmeneteket pl. a $\langle P \rangle(\beta)$ görbékben tapasztalható „ugrások” jelzik. Ezek természetesen csak az $M \rightarrow \infty$ termodinamikai limeszben lesznek igazi ugrások. Mi lesz K értéke?

(Pesznák Dávid)

23. Egy közelmúltban megjelent tanulmányban Kondor és Papp (<https://arxiv.org/abs/2412.13580>) meglepődve tapasztalták, hogy az egyik 8 spines Sherrington–Kirkpatrick spinüveg-modell alacsony gerjesztett állapotai egy tóruszon helyezkednek el (10. ábra a cikkben). Figyelmen kívül hagyva az energiaértékeket (a cikktől eltérően nem megkövetelve, hogy első vagy második gerjesztett állapotok legyenek), állapítsuk meg, hogy más méretű tóruszok előfordulnak-e ebben a rendszerben! Általánosítsuk az eredményt N -spin rendszerre, és adjunk meg egy algoritmust, ami megkeresi a tóruszokat!

(Csabai István)

24. A feladatban qubitek összefonódási mintázatait és a hozzájuk rendelhető lineáris operátorok unitaritását vizsgáljuk. Az összefonódás mérőszámaként a Neumann-féle entrópiát használjuk. Ha egy rendszert két részrendszerre (A és B) bontunk, akkor az entrópia

$$S_{A,B} = -\text{Tr}(\hat{\rho}_A \log(\hat{\rho}_A)),$$

ahol $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B \hat{\rho}$ az A részrendszer ún. redukált sűrűségmátrixa, amit a B rendszer szabadsági fokaira elvégezett részleges trace-képzés definiál, $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ pedig a teljes sűrűségmátrix.

Először $N = 2$ qubittel indítunk, melynél a $|0\rangle$ és $|1\rangle$ bázisvektorokat használjuk. A két qubites rendszer állapotait egy $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ vektor írja le, melynek komponensei Ψ_{ab} az adott bázisban, ahol $a, b = 0, 1$. Minden vektorhoz társíthatunk egy $\hat{A} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ lineáris operátort a következő megfeleltetéssel:

$$A_a^b = \Psi_{ab}$$

a) Mennyi a két qubit közötti maximális összefonódás? Milyen állapotok érik ezt el? Milyen a redukált sűrűségmátrixok formája ezekben az esetekben?

b) Mutassuk meg, hogy ezekben az esetekben a hozzárendelt \hat{A} lineáris operátor *arányos* egy unitér operátorral!

Nézzük meg az $N = 4$ qubit esetét is! Ilyenkor a vektorok a négyszeres tenzorszorzat-tér elemei, melyeket az adott bázisban a Ψ_{abcd} komponensek írnak le. Négy qubitet összesen háromféle módon tudunk két párba szétbontani. Minden ilyen szétbontás esetére nézzük meg az összefonódási entrópiákat!

c) Mennyi két pár qubit maximális összefonódása? Milyenek a redukált sűrűségmátrixok ezekben az esetekben? Mutassunk példákat!

d) Társítsunk most az állapotokhoz $\hat{A} : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ lineáris operátorokat, mindhárom szétbontás esetére! Mutassuk meg, hogy ha maximális az összefonódás egy adott bi-partícióra, akkor a hozzárendelt lineáris operátor arányos egy unitér operátorral!

e) Összesen háromféle kettébontás lehetséges. Van-e olyan állapot, ami maximális összefonódással bír két bi-partícióra is?

f) Van-e olyan állapot, ami maximális összefonódással bír *mindhárom* bi-partícióra? Végezzünk numerikus keresést random vektorokkal!

(Pozsgay Balázs)

25. Amikor dr Absoluto Zéró, Gumipart örökös elnöke, a Haza Atyja stb. megtudta, hogy a csillagászok felfedeztek egy lakható, mi több lakott bolygót (amely a Zéta Monoculi nevet kapta) egy a Naphoz közeli csillag körül, azonnal magához hívatta udvari főfizikusát és a Gumiparti Labdarúgó Szövetség elnökét.

– Mit tudnak annak a bolygónak a lakóiról? Van lábuk? Kettő?

– Az a bolygó szinte a Föld ikertestvére! Ugyanakkora a mérete, ugyanolyan a légkör, a hőmérséklet, a felszíni gravitáció – ezért feltételezhetjük, hogy a lakói is hasonlítanak hozzánk.

– Hát ha ilyen csodásan hasonlók hozzánk, akkor tudniuk kell focizni! És akkor nekünk kötelességünk megmérkőzni velük, bebizonyítva a gumiparti futball elsőbbségét. Azonnal lássanak munkához!

Így is tettek. A sportszakember megkezdte a válogatott tagjainak kiválasztását és a játékosok fizikai állóképességének fejlesztését, hogy a sok évig tartó úrutazás után is kirobbanó formában legyenek.

Az udvari főfizikus, dr Aly Tudde Mynek pedig hozzákezdett a fotonrakéta tervezéséhez. A fotonrakéta köztudottan fotonokat, azaz nulla tömegű, fénysebességgel mozgó részecskéket bocsát ki, ezzel biztosítva a gyorsításhoz szükséges tolóerőt. A fotonokat a hajó a magával cipelt kisbolygó anyagának átalakításával nyeri (a részletek szakmai titkot képeznek, az viszont biztos, hogy a folyamat 100%-os hatásfokú.) A rakéta „gyertya”-üzemmódban működik, egyenletesen fogyasztva üzemanyagát, így az űrhajó tömege a kezdeti M -ról T sajátidő elteltével a focistákat, élelmüket, stoplis cipőiket, valamint a repiajándékokat tartalmazó hasznos teher m értékére csökken – ez az érték természetesen elhanyagolhatóan csekély a hajó kezdeti tömegéhez képest. A hasznos terhet később kiegészítették néhány focilabdával is, mert nem bíztak a galaktikus ipar által gyártott labdák minőségében – ám ez nem sokat változtatott a tömegarányokon.

A fotonhajtómű paramétereit úgy állították be, hogy az üzemanyag éppen akkor fogyjon el, amikor a hajó megérkezik a célbolygóhoz.

Már majdnem elkezdtek az űrhajó építését, amikor az egyik focista, aki sok űrhajós sci-fit olvasott, megkérdezte az edzőt, hogyan is fognak kiszállni a majdnem fénysebességgel száguldó űrhajóból, amikor az elhalad a Zéta Monoculi mellett.

A főfizikus a fejét vakarta. „Nem értek a focihoz” – mentegetőzött. De azért elkezdte az útiprogram újratervezését. Az új terv szerint a hajó az út elején gyorsít, egy jól kiválasztott helyen megfordul, és hajtóművét az út hátralevő részén fékezésre használja. A „gyertya”-üzemmód természetesen megmaradt, hiszen így épült a hajtómű. Az időegységenként kibocsátott fotonok számát azonban újra kellett kalibrálni. A rakéta adatait úgy módosították, hogy az új útiprogram szerint is épp akkor fogyjon el az üzemanyag, amikor odaérnek a Zéta Monoculihoz. (Az űrfocisták hazatérésére nem tartalékoltak üzemanyagot. A diktátor elmagyarázta nekik, hogy a – természetesen fölényesen megnyert – meccs után egy ideig maradjanak a Zétán, majd az időközben jól kitanult űrmérnöki és csillagászati tudományuk alapján barkácsoljanak egy új hajót, keressenek egy újabb lakott bolygót, és vigyék el oda is a gumiparti foci hírért. Aztán még tovább – határ a csillagos és fekete lyukas ég!)

Közeledett az indulás pillanata. Ekkor az izgága játékos felvetette, hogy mi van akkor, ha az idegenek mégsem ismerik a földi foci szabályait. Akkor hiába a felkészülés és az egész utazás? A sokat látott főfizikus hamar megtalálta a megoldást. Elkészített egy tömör, de velős rádióüzenetet, amely a meccsre való udvarias felkérés („Hé! Gyertek ki a hóra!”) mellett a futball szabályainak leírását is tartalmazta, valamint azt a felszólítást, hogy az üzenet vétele után azonnal kezdjék meg a zétai focicsapat edzéseit. Ezt az üzenetet a gumiparti szuperpálmák leveleiből készült rádióteleszkóp a fotonrakéta indulásának pillanatában sugározta ki a Zéta Monoculi felé.

A galaktikus küldetésre induló csapat ünnepélyes búcsúztatásakor a diktátor a játékosok lelkére kötötte, hogy az egész utat edzéssel töltsék. (E célból az űrhajóba az utolsó pillanatban még egy focipályát is beépítettek, nézőtérrel. Egy ilyen megrendelés Gumiparton még soha nem okozott gondot. Most sem.)

A fair play-re kényes edző előzőleg megkérte a fizikust, az útiterv beprogramozása során ügyeljen arra, hogy az űrhajóban edző gumiparti és a saját bolygóján készülődő zétai csapat edzésideje azonos legyen. Ali Tudde Mynek szomorúan csóválta a fejét:

– Ez sajnos nem lehetséges.

– Igen, én is hallottam már az időtorzulásról és az ikerparadoxonról – szomorodott el az edző. Ám hamarosan talált egy cikket, amely a szokatlan gravitációs körülmények közötti edzés mód-szereket tárgyalta. Kiderült, hogy az edzés hatékonysága, a „fittülés”, azaz a fitness időegység alatti növekedése fordítva arányos a helyi gravitációs gyorsulással. A cikk bevezette az „effektív edzettség” fogalmát, mely a fittülés időintegráljával arányos. Az edző ismét felvetette a kérdést a fizikusnak, azt kérve, hogy a két csapat effektív edzettsége a hajó megérkezésekor legyen egyenlő. Ezt a kérést a fizikus – sok számolás után – immár teljesíthetőnek ítélte.

– Fő a becsületes játék! Az Absuluto Zéro eszméin nevelkedett gumiparti csapat egyenlő feltételek és egyforma effektív edzettség esetén is legázolja az elkényelmesedett monokulaiakat! – jelentette az edző az induláskor a csapattól búcsúzó diktátornak. Aztán a fizikushoz fordult:

– Remélem, jól beprogramoztad azt a rakétát! Akármilyen kajakos gyerekek az én focistáim, 10000 g-t legfeljebb egyetlen pillanatra bírának ki!

– Nem kell aggódnod, a feltételeidet pontosan teljesítettem.

Kérdésünk egyszerű: milyen messze van a Földtől a Zéta Monoculi?

Két tizedes pontosságú numerikus választ kérünk!

Tanács: a számítás során használjuk az év és a fényév idő- és távolságegységeket. Emellett célszerű élnünk az $1 \text{ fényév}/(1 \text{ év})^2 = 1 g$ közelítéssel, ahol g a földi nehézségi gyorsulást jelenti.

(Dávid Gyula)

\end{document}