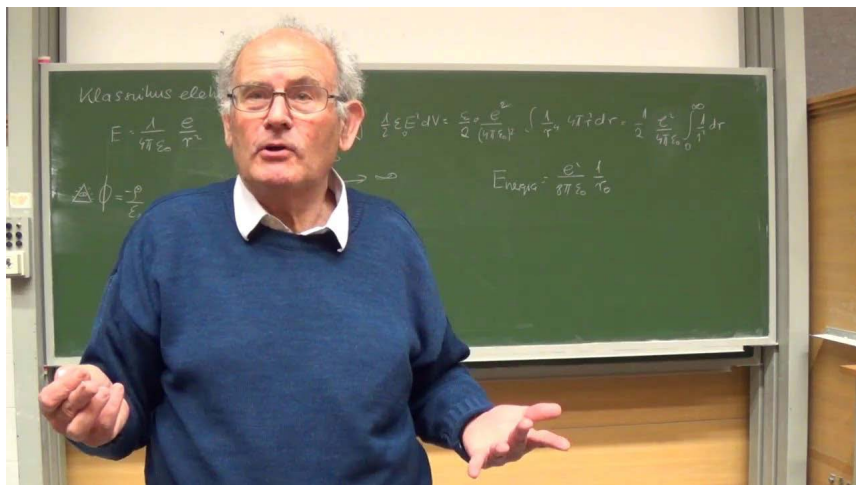
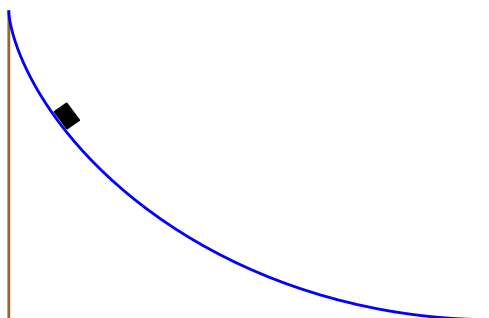


AZ 52. ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 2022. január 28 – február 7.



*2021-ben elhunyt Tichy Géza, az Ortvay-verseny egyik alapítója,
sokunk kedves tanára és jó barátja.
Az idei Ortvay-versenyt az Ő emlékének ajánljuk.*

- Adott egy fél ciklois alakú lejtő, amelynek tetején kezdősebesség nélkül elengedünk egy testet. A súrlódási erő arányos a nyomóerővel. A test csúszva leér a lejtő aljába, és ott megáll. Mekkora volt a súrlódási együttható a lejtő és a test között?



(Tichy Géza, 1945–2021)

- Oldjuk meg a

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}) = x^2 y^2 \dot{z}^2 + \frac{x^2 \dot{y}^2}{1 - y^2} + \dot{x}^2$$

Lagrange-függvényből kapott mozgásegyenleteket! Keressünk olyan fizikai rendszert, melynek ez a mozgásegyenlete!

(Tichy Géza, 1945–2021)

3. Egy 1200 kg teljes tömegű autó közlekedik Nincspusztáról a tőle 100 km távolságra levő Seholvárosba. A két település tengerszint feletti magassága ugyanaz, a térképen egyenes út köti össze őket a dombos tájon, és forgalom, közlekedési lámpa, kereszteződés sincs. Az út magasságprofilja szinuszos függvény alakú, és éppen 100 teljes periódust tartalmaz, a függvény amplitúdója M , ahol $0 < M < 100$ m. Az autóra hat a súrlódási erő és a légellenállás, összesen $F = A + Bv + Cv^2$, ahol $A = 100$ N, $B = 5$ Ns/m és $C = 0,25$ Ns²/m². A motor $P_0 = 5$ kW teljesítménnyel dolgozik akkor is, ha az autó áll, és menet közben is ennyi extra szükséges teljesítménnyel kell számolni az autó mozgatásán kívül. Fékezéskor nem nyerünk vissza energiát, csak a fékek kopnak és melegednek. Ha a sofőr végig tempomatot használ, milyen konstans sebességet állítson be (az M paraméter függvényében), ha a legkevesebb benzint akarja fogyasztani, és hány liter benzint fogyaszt el ekkor? Ha nem használ tempomatot, és optimálisan vezet, mennyi lesz a minimális fogyasztása? (Egy liter benzin 9 kWh energiát ad.)

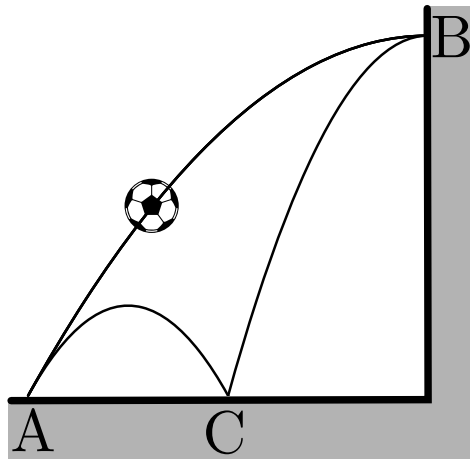
(Veres Gábor)

4. Az iskolai szünetben egy focilabdát rugdosunk a falhoz. A rúgás helye az ábrán látható A -val jelölt pont. A labda a falat pontosan merőlegesen találja el a B pontban, majd a pattanás után a C jelzésű helyen ér földet. A földről visszapattanva pontosan visszaér az eredeti kiindulási helyére. Egy fallal vagy talajjal való ütközést a következő módon modellezhetünk: a felülettel párhuzamos sebességkomponens nem változik, míg az arra merőleges komponens $(-k)$ -szorosára változik. Általánosítsuk a fenti esetet: pattanjon a labda pontosan N -szer a földön, mielőtt visszaérkezik a kiindulási helyére!

a) Mennyi a k paraméter értéke adott N -re?

b) Mennyi ideig van a levegőben a labda?

Részletesen térjünk ki az $N \rightarrow \infty$ esetre!



(Tajkov Zoltán, Koltai János és Berta Dénes)

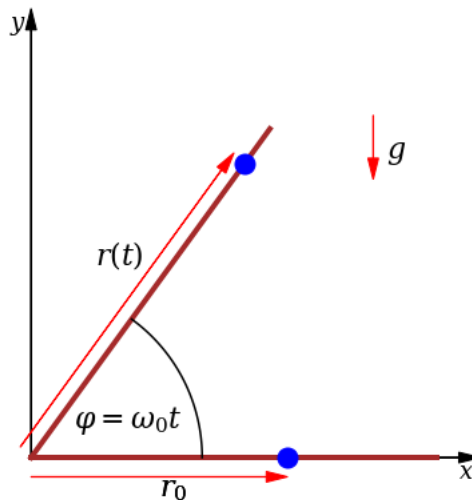
5. Vizsgáljunk egy olyan matematikai ingát, melynek l hossza időben előírt módon egyenletesen változik: $l(t) = l_0(1 + \alpha t)$. (Az időegység megfelelő választásával az l_0 kezdeti hossz és a g gravitációs gyorsulás igény szerint kijelölhető az egyenletekből.) A légellenállás elhanyagolható, és az α ráta kicsi, de nem annyira, hogy az adiabatikus határesetben legyünk. Numerikusan kövessük a fázistérben a különböző állapotokból induló mozgásokat, és ezek során a mechanikai energia változását, különös tekintettel azokra, melyek során a lengések átmennek átfordulásokba, vagy fordítva! Javasolható-e olyan ábrázolás, mely a mozgások globális követésére alkalmas ebben a rendszerben?

(Jánosi Dániel és Tél Tamás)

6. Egy hosszú rúd forog egyik végpontja körül függőleges síkban, állandó ω_0 szögsebességgel. A gravitációs gyorsulás homogén, lefele mutat, nagysága g . A rúdon súrlódásmentesen csúszik egy gyűrű. A $t = 0$ pillanatban a rúd vízszintes helyzetű, a gyűrű ekkor az origótól r_0 távolságra van, rúd iránti sebessége nulla. Ebben a pillanatban a rúd felfelé fordul tovább.

Hogyan mozog a gyűrű? Vizsgáljuk a gyűrű pozícióját akkor, amikor a rúd először lesz függőleges helyzetű!

- Mekkora ω_0 esetén lesz ekkor a gyűrű éppen az origóban?
- Mekkora ω_0 esetén lesz a gyűrű ekkor épp r_0 magasan?
- Hol lesz a gyűrű nagy ω_0 esetén?
- Mi a feltétele annak, hogy a gyűrű a mozgás során valamikor becsússzon a forgás középpontjába?



(Fehér Szilveszter)

7. Dr. Ali Tudde Mynek, Gumipart főfizikusa korábbi tapasztalatai alapján sejtette, hogy valamiféle feladat vár rá, amikor dr. Absoluto Zero, a kis egyenlítő ország Örökös Elnöke magához hívatta. A diktátor némán, állandó gyorsulású pálya mentén mozgott a főfizikus körül, amíg végül előadta a problémáját:

– A minap... – kezdte a monológját – részt vettem a dr. Absoluto Zeróról elnevezett gumiparti hullámvasút felavatásán, és természetesen kipróbáltam azt. A gyomrom fel-le ugrott a sok összevissza gyorsulástól. Ez nem illik sem nagy nemzetünkhöz, sem az én gyomromhoz. Az ön dolga az lesz hogy újratervezi a hullámvasutat, kiküszöbölve ezt a kellemetlenséget!

Segítsünk a főfizikusnak elkészíteni a hullámvasút vázlatát! Az egyszerűség kedvéért feltételezheti, hogy a vasút pályája egy függőleges síkban helyezkedik el, alakját egy nem feltétlenül egyértékű $x(z)$ függvény írja le (önmetszés megengedett). A dinamikának olyannak kell lennie, hogy a kocsis konstans erővel (a kocsi nyugalmi súlyának C -szeresével) nyomja a pályát. A súrlódás elhanyagolható. A lehetséges megoldások közül válasszuk ki az(oka)t, amelyben a hullámvasutak esetén szokásos „hurok” szerepel!

(Gombkötő Ákos)

8. Ajánlom ezt a feladatot Tichy Géza (1945–2021), az Ortvay-verseny egyik alapítója emlékének, aki sok egyéb érdekes és izgalmas fizikai ismeret mellett azt is megtanította nekünk, hogyan kell kezelni az anholonóm kényszermozgások problémáját (lásd az 1971. évi Fizikai Feladatmegoldó Verseny 8. feladatát).

Egy β hajlásszögű végtelen, sík jéglaapon pontszerű, m tömegű, Θ tehetetlenségű korcsolya csúszik. A $t = 0$ pillanatban sebessége vízszintes irányú, nagysága v_0 . A korcsolya kezdeti szögsebessége ω , a pálya az első pillanatokban a lejtőn felfelé kanyarodik. Fennáll, hogy $v_0 > g/\omega$, ahol g a gravitációs gyorsulás lejtő irányú komponense.

A korcsolya elmozdulása csak az él pillanatnyi irányában megengedett, az erre merőleges elmozdulásokat a fellépő kényszererők megakadályozzák.

A korcsolyára súrlódási erő hat, amelynek iránya ellentétes a pályamenti sebesség irányával, nagysága $S = mcv$, ahol c a frekvencia-dimenziójú pozitív súrlódási együttható.

Vezessük le a mozgásegyenleteket, és oldjuk meg őket analitikusan! Ábrázoljuk a korcsolya pályáját a lejtőn!

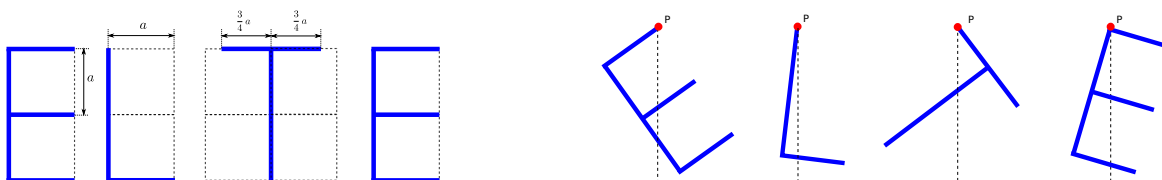
Milyen mozgást lát a távoli megfigyelő, aki repülőgépről figyeli a korcsolya viselkedését? Milyen „fázisátalakulás”, minőségi ugrás következik be a mozgás során? Milyen aszimptotikus megoldáshoz tart a korcsolya mozgása (feltéve, ha a lejtő tényleg végtelen, és van elegendő hely az aszimptotikus állapot kialakulásához)? Mik ennek az aszimptotikus állapotnak az adatai, és hogyan függnek a feladat paramétereitől?

Vizsgáljuk meg a feladat két határesetét: a) a súrlódási együtthatóval nullához tartunk; b) a lejtő hajlásszögével tartunk nullához!

Milyen fontos fizikai feltételek elhanyagolása miatt nem realiztikus a feladatban ismertett modell? Hogyan lehetne ezeket a hiányosságokat pótolni? (Csak ötletet kérünk!)

(Dávid Gyula)

9. Egyenletes tömegeloszlású, vékony drótból elkészítettük az Eötvös Loránd Tudományegyetem rövidítését, az ELTE betűit, majd kékre festettük (baloldali ábrán látható a méretek megadásával együtt). A festék száradásához mindegyik betűt egyik sarkán (a jobboldali ábrán a P pontban) úgy akasztottuk fel, hogy minden irányban szabadon lengedezzen. Mennyi lesz a papír síkjában, illetve arra merőleges irányban az egyes betűk lengési ideje kis kitérésekre?



(Cserti József)

10. Egy furcsa, három egyforma atomból álló molekula potenciális energiája:

$$V = V_0 \left[\frac{P}{L} + \frac{3\sqrt{3} L^2}{8 A} \right],$$

ahol P a három atom által kijelölt háromszög kerülete, A pedig a területe. A képletben V_0 és L konstans pozitív paraméterek.

Határozzuk meg a molekula rezgési frekvenciáit, ha az atomok csak a háromszög síkjában mozdulhatnak el!

(Veszeli Máté)

11. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem fizikushallgatói intenzív kutatásaik alapján földönkívülieket fedeztek fel a Síkbolygó négyzetes felületén. Ez a bolygó egy tökéletes, négyzet alapú hasáb, a négyzet oldalhossza a , a hasáb magassága pedig h , az oldalak aránya $h/a = 0,25$. A Síkbolygó tömegeloszlása homogén, sűrűsége megegyezik Földünk átlagos sűrűségével.

Az élet meglehetősen furcsa ezen a lapos vidéken. A Síkbolygó közepén van egy nagy óceán. Az óceán partja a négyzet középvonala mentén mérve a középponttól a négyzet széléig mért távolság felé felhúzódik.

Milyen mély az óceán a négyzet közepén?

(Cserti József)

12. Ismeretes, hogy hagyományos gyűjtőlencsék esetén az optikai tengelyhez nem elég közel futó fénysugarak miatt lencsehibák lépnek fel. Ez elkerülhető a Fresnel-féle zónalemez használatával. Ha megfelelően választjuk meg a gyűrűk sugarait ill. sűrűségüket, akkor pl. el tudjuk érni, hogy az optikai tengellyel párhuzamos fénynyalábot a zónalemez úgy fókuszálja a lemeztől f távolságban, hogy a lemez szélei közelébe érkező fénysugarak is e fókuszpontban adnak intenzitásmaximumot.

Sejthető azonban, hogy az így készült zónalemez nem lesz tökéletes egy, az optikai tengelyen véges t távolságban elhelyezett pontszerű fényforrás fényének fókuszálásában. Lesznek-e, és ha igen, hol lesznek nagy intenzitású pontok? Ezen azt értjük, hogy olyan pontokat keresünk, ahol a helyi fényintenzitás és a bejövő fény intenzitásának hányadosa végtelenhez tart, ha a rendszer méretének és a fény hullámhosszának a hányadosa végtelenhez tart.

(Kaufmann Zoltán)

13. Egyenletesen töltött, vékony szigetelő huzalból szabályos háromszöget hajlítunk, és a középpontjába egy tömegpontnak tekinthető, elektromosan töltött testet helyezünk. A töltés mozgását a háromszög síkjára korlátozzuk.

Mennyi lesz a töltés rezgésének frekvenciája kis kitérések esetén? Mit állíthatunk, ha a töltés mozgása mind a három dimenzióban megengedett? Van-e olyan szigetelő huzalból kialakított keret, amelyből nem „szökhet” ki a töltés?

(Cserti József)

14. Egy henger alakú, ℓ hosszúságú és $r \ll \ell$ sugarú, légmagos szolenoid meneteinek száma N , ahol $N \gg 1$. Mennyivel változik meg a szolenoid öninduktivitása, ha a középpontjába egy, a szolenoid méreteinél sokkal kisebb, V térfogatú, gömb alakú, $\mu_r \gg 1$ relatív permeabilitású vasgolyót helyezünk?

(Széchenyi Gábor)

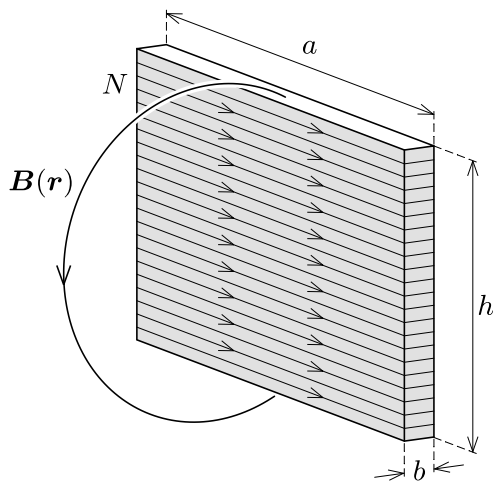
15. Köztudott, hogy egy vezető, nem mágneses anyagból készült függőleges cső belsejében egy erős mágnes az indukált örvényáramok miatt lassabban esik le, mint szabadeséskor a gravitációs térben. Elég hosszú cső esetén a mágnes egy idő után állandó sebességgel fog mozogni, amelyet terminális sebességnek neveznek.

Az elméleti munkák általában hengeres csöveket feltételeznek. Mi most egy szabályos N -szög keresztmetszetű csövet vizsgálunk. Számítsuk ki a végsebességet az ilyen csövekben különböző N értékekre (például $N = 3 \dots 8$ esetén)!

Az egyszerűség kedvéért a mágneset függőleges helyzetű mágneses dipólusként modellezzük. Mivel a leeső mágnes sebessége lassúbb, mint az örvényáramok lecsengésének időskálája, az önindukciót elhanyagolhatjuk.

(Cserti József)

16. Egy h hosszúságú, N menetes egyenes tekercs keresztmetszete olyan téglalap, melynek oldalai a és b , ahol $b \ll h \ll a$ (lásd az ábrát). A tekercsbe időben állandó I erősségű áramot vezetünk. Milyen alakúak azok a mágneses indukcióvonalak, amelyek a tekercs középpontját tartalmazó, az a oldaléle merőleges síkban haladnak?



(Vigh Máté)

17. Adott két, egymástól d távolságra lévő, L hosszúságú, egyenes, szupravezető vezeték (ahol $L \gg d$), amelyek két végükön összekötve egy Ld méretű, téglalap alakú áramkört formáznak. A hosszú oldal közepén legyen az egyik vezetéken egy állandó R ellenállású fogyasztó, a másikon pedig egy U feszültségű ideális feszültséggenerátor (amelynek belső ellenállása nulla, és feszültsége a terheléstől független), egy kapcsolóval ellátva.

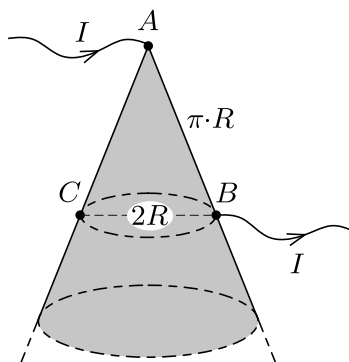
Hogyan változik a bekapcsolástól kezdve a fogyasztón eső feszültség, illetve ha ez egy izzólámpa, akkor ennek fényessége? Vajon mennyi idő alatt fénylik fel?

Mi történik akkor, ha a bekapcsolással egyidejűleg (egy együttmozgó megfigyelő szerinti rendszerben) elvágjuk az áramkör két végén a vezetéket?

Mennyiben változna a helyzet, ha a vezeték nem lenne szupravezető, hanem valamilyen adott hosszegységenkénti ellenállása lenne?

(Csanád Máté)

18. Egy vékony, δ vastagságú fémlémezből nagy (a feladatban szereplő méretekhez képest végtelennek tekinthető), kúp alakú felületet hegesztettünk össze. A kúp A -val jelölt csúcsába I erősségű áramot vezetünk, majd az egyik alkotón lévő B pontból elvezetjük azt. Határozzuk meg a B -vel átellenes C pontban az áramsűrűség-vektor irányát és nagyságát! Ismert, hogy az AB távolság értéke $\pi \cdot R$, míg a B és C pontok (térbeli) távolsága $2R$.



(Vigh Máté)

19. Egy rögzített, $+Ze$ töltésű atommag körül $-e$ töltésű, m tömegű elektron kering relativisztikus sebességgel. Vezessük le Kepler harmadik törvényének ideillő változatát, azaz határozzuk meg a pálya geometriai adatai és a keringési idő közti kapcsolatot a) rendszeridőben, b) sajátidőben számolva!
(Nem zárt pálya esetén a két egymást követő perihélium között eltelt időt tekintjük keringési időnek.)

(Dávid Gyula és Szepessy Dávid)

20. A kvantummechanikai perturbációs számítást optimalizáció alkalmazásával javíthatjuk. A hagyományos perturbációs számítás kiindulópontja valamely $\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon \hat{V}$ Hamilton-operátor, ahol a perturbálatlan \hat{H}_0 spektruma ismert, és $\epsilon \hat{V}$ kicsiny perturbációnak tekinthető. E felbontásban mindazonáltal van némi szabadság, és pedig a perturbálatlan tagnak egy paraméterrel súlyozott részét a perturbációhoz vehetjük. Így a teljes \hat{H} nem változik, \hat{H}_0 és az $\epsilon \hat{V}$ perturbáló potenciál viszont igen, s ennek következtében általában módosulnak az energiaszintek perturbatív, közelítő kifejezései. Miután ezek a szabad súlyparamétertől immár függhetnek, ebben megkísérelhetjük a közelítés hibáját minimalizálni.

Egyszerű példaként tekintsük a negyedfokú potenciállal perturbált harmonikus oszcillátort

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{k(1 + \lambda\epsilon)}{2} \hat{x}^2, \quad \epsilon \hat{V} = \epsilon \left(b \hat{x}^4 - \frac{k\lambda}{2} \hat{x}^2 \right),$$

ahol m, k, b konstansok, és ϵ, λ dimenziótlan paraméterek. Most a kvadratikus potenciálnak a határozatlan $-\epsilon\lambda$ paraméterrel súlyozott részét is perturbációnak tekintjük. Oldjuk meg az alábbi feladatokat:

- A $\lambda = 0$ eset tankönyvi példa: adjuk meg az n -edik energiaszint értékét ϵ -ban első rendig!
- Keressük meg analitikusan vagy numerikusan azt az optimális λ paramétert, amelyre az n -edik egzakt energiaszintet az elsőrendű perturbatív kifejezése a legkisebb hibával közelíti! Írjuk fel e kifejezéseket, vagy numerikusan határozzuk meg őket néhány n -re $\epsilon > 0$ kellően nagy értékéig! Emlékeztetünk arra, hogy a \hat{H}_0 -beli ϵ -ban nem, csupán az $\epsilon \hat{V}$ együtthatójában fejtünk sorba lineáris rendig.
- Oldjuk meg az időfüggetlen Schrödinger-egyenletet numerikusan konkrét m, k, b mellett néhány n -re a b)-ben vizsgált ϵ tartományban, kellően sűrűn vett pontokban! Ábrázoljuk az E_n energiákat az ϵE_0 függvényében, ahol $E_0 = \hbar\omega_0(n + 1/2)$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, s mutassuk be az a) és b) alpontok eredményeit is! Meddig jó közelítés az optimalizált kifejezés?
- Mi a helyzet $\epsilon < 0$ esetén? (Szorgalmi kérdés, ennek megválaszolása nélkül is megszerezhető a maximális pontszám.)

(György Zoltán és Györgyi Géza)

21. Számítsuk ki a K_Φ és K_Ψ normálási tényezőket, majd az oszcillátor $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$ kvantumszámoperátorának és \hat{x} helyoperátorának várható értékét és szórását az egydimenziós harmonikus oszcillátor $|\Phi\rangle = K_\Phi \cos(\sqrt{w} \hat{a}^+) |0\rangle$ és $|\Psi\rangle = K_\Psi \sin(\sqrt{w} \hat{a}^+) |0\rangle$, állapotaiban, ahol \hat{a}^+ a keltő operátor, $|0\rangle$ az alapállapot, w pedig pozitív valós szám! Ábrázoljuk a kiszámított mennyiségeket a w paraméter függvényében!

(Dávid Gyula)

22. Sűrűségoperátorok konvex kombinációján az alábbi kifejezést értjük:

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \hat{\rho}_n, \quad \text{ahol } p_n \geq 0 \quad \forall n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1,$$

és természetesen

$$\text{Tr} \hat{\rho} = 1.$$

Vegyük az alábbi általános fizikai (pozitív szemidefinit) gaussi sűrűségoperátort helyreprezentációban

$$\begin{aligned} \rho_n(x, y) &= \exp\{-A_n(x-y)^2 - iB_n(x-y)(x+y) - C_n(x+y)^2 \\ &\quad - iD_n(x-y) - E_n(x+y) - N_n\}, \end{aligned}$$

ahol a normálási faktor

$$e^{-N_n} = \sqrt{\frac{4C_n}{\pi}} e^{-\frac{E_n^2}{4C_n}},$$

valamint $A_n \geq C_n > 0$ és B_n, D_n, E_n tetszőleges valós számok.

Elő lehet-e állítani végtelen dimenziós Hilbert-téren minden fizikai sűrűségoperátort gaussi sűrűségoperátorok konvex kombinációival? Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?

(Homa Gábor)

23. Egy $\hat{\rho}_1$ sűrűségoperátorral jellemzett kvantumállapot von Neumann-féle relatív entrópiája egy $\hat{\rho}_2$ kvantumállapothoz képest a következőképpen írható fel:

$$S(\hat{\rho}_1 | \hat{\rho}_2) = \text{Tr} \hat{\rho}_1 (\log \hat{\rho}_1 - \log \hat{\rho}_2),$$

ahol $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2 \geq 0$ és $\text{Tr} \hat{\rho}_1 = \text{Tr} \hat{\rho}_2 = 1$. Egy helyreprezentációban felírt gaussi sűrűségmátrix alakja:

$$\rho(x, y) = \exp\{-(A(x-y)^2 + iB(x+y)(x-y) + C(x+y)^2 + N)\},$$

ahol $A \geq C > 0$, $B \in \mathbb{R}$, valamint az N normálási tényező garantálja a $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ egyenlőség teljesülését.

Vizsgáljuk meg a fent definiált relatív entrópiát a most értelmezett gaussi állapot és a kanonikus állapot között!

A kanonikus állapot (vagy Gibbs-féle egyensúlyi állapot) rögzített $\beta > 0$ inverz hőmérséklet mellett $\hat{\rho}_\beta = \exp(-\beta \hat{H}) / \exp(-\beta F_\beta)$, ahol $F_\beta = -\beta^{-1} \text{Tr} \exp(-\beta \hat{H})$ a kanonikus szabadenergia, ami biztosítja $\text{Tr} \hat{\rho}_\beta = 1$ normáltságot. Ekkor $S(\hat{\rho} | \hat{\rho}_\beta) = -S(\hat{\rho}) + \beta[\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{H}) - F_\beta]$, a $\hat{\rho}$ állapotra vonatkoztatott Helmholtz-féle szabadenergia pedig $F(\hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{H}) - \beta^{-1} S(\hat{\rho})$, melynek segítségével a relatív entrópia a következőképpen áll elő:

$$S(\hat{\rho} | \hat{\rho}_\beta) = \beta(F(\hat{\rho}) - F_\beta),$$

ahol $S(\hat{\rho}) = -\text{Tr} \hat{\rho} \log \hat{\rho}$.

Legyen $T = 1/(k_B \beta)$, és $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$. Mutassuk meg, hogy ebben az esetben

$$\rho_T(x, y) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\hbar\omega/k_B T)}} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar \sinh(\hbar\omega/k_B T)} \left((x^2 + y^2) \cosh \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 2xy\right)\right\}!$$

Határozzuk meg az $S(\hat{\rho} | \hat{\rho}_\beta)$, $F(\hat{\rho})$, F_β mennyiségeket a fenti paraméterek függvényében!

(Homa Gábor)

24. a) Egy hosszúkás forgási ellipszoid alakú üreg belső fala ideális tükör, amely tetszőleges hullámhosszú elektromágneses sugárzást teljes egészében visszaver.

Az ellipszoid fókuszpontjaiba egy-egy fekete lyukat rögzítünk. Az üregben a lyukakon és az általuk kibocsátott sugárzáson kívül semmiféle anyag nincs.

A jelenség vizsgálata során elhanyagolhatjuk azt a késleltetési időt, amit a fénynek a falig eljutása és az onnan történő visszaverődés igényel.

Hogyan változik a két fekete lyuk tömege az idő függvényében? Keressünk analitikus megoldást!

Mi lesz a folyamat végeredménye?

Adjunk numerikus becslést a folyamat karakterisztikus idejére, ha kezdetben a két fekete lyuk össztömege a Nap tömegének hússzorosa, tömegkülönbségük pedig megegyezik a Föld tömegével!

b) A feladat geometriája ugyanaz, mint az a) részben, de az üreget kezdetben a fekete lyukak Hawking-hőmérsékleténél α) jóval melegebb, β) jóval hidegebb, térben homogén, Planck-eloszlású elektromágneses sugárzás tölti ki. Kövessük a három részrendszer hőmérsékletének időbeli változását!

c) Most csak egyetlen fekete lyukat helyezünk el egy gömb alakú, ideálisan tükröző belső felületű üreg középpontjában. A tükörfelületet a $t = 0$ pillanatban hozzuk létre. Az üregben a fekete lyukon és sugárzásán kívül más anyag nincs jelen. Ezúttal viszont ne hanyagoljuk el a sugárzás terjedéséhez és visszaverődéséhez szükséges időt! Kövessük és ábrázoljuk a fekete lyuk tömegének és hőmérsékletének időfejlődését!

(Héjász István)

25. A speciális relativitáselméletben az adott külső $\Phi(x)$ skalármezőben mozgó pontrészecske négyes helyvektora a következő mozgásegyenletet elégíti ki:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(m + \frac{g}{c^2} \Phi(x) \right) u_k(\tau) \right] = g \partial_k \Phi(x).$$

Itt u_k a részecske négyessebessége, c a fénysebesség, g a részecske és a skalármező közti csatolási állandó, m a részecske (skalármező nélkül mérhető) nyugalmi tömege. A $\Phi(x)$ skalármező a téridő egy pontjának x négyeskoordinátáitól függ.

Ennek az egyenletnek számos érdekes megoldása van, változatos alakú mozgáspályákkal. Tekintsük az így kialakuló négydimenziós pályákat egy megfelelő metrikájú általános relativisztikus téridő geodetikus világvonalainak! Hogyan kell ehhez megválasztani a téridő metrikus tenzorát?

Vizsgáljuk meg azt a speciális esetet, amikor a $\Phi(x)$ skalármező sztatikus, azaz van egy olyan inerciarendszer, amelyben a Φ mező értéke nem függ a nulladik, idő jellegű koordinátától!

Számítsuk ki a megfelelő görbült téridő görbületi tenzorát és a görbületet létrehozó hipotetikus anyagmező energiaimpulzus-tenzorát!

Hogyan kell megválasztani a $\Phi(\mathbf{r})$ függvényt, ha azt szeretnénk, hogy a megfelelő általános relativitáselméleti problémában a téridőt görbítő anyag izotróp „gáz” legyen, azaz energiaimpulzus-tenzora csak diagonális elemeket tartalmazzon? Mi lehet ekkor a „gáz” állapotegyenlete?

Egészítsük ki a feladatot azzal a feltevéssel, hogy a $\Phi(r)$ skalármező centrális, azaz értéke csak a vizsgált pontnak az origótól mért r távolságától függ! Mit mondhatunk ekkor a megfelelő téridőt görbítő izotróp anyag energiaimpulzus-tenzoráról és állapotegyenletéről?

(Szepessy Dávid és Dávid Gyula)

26. A sejtautomaták a természetnek ún. „ultra-diszkrét” modelljei: olyan klasszikus rendszerek, amelyben a tér és az idő is diszkrét, és a változók is diszkrét értékűek. Vegyünk egy egydimenziós ún. blokk-sejtautomatát! Ilyenkor a klasszikus változóink ψ_j , $j = 1, \dots, 2L$ melyeket egy kör mentén helyezünk el (periodikus határfeltételek), és minden egyes változó az $X = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ halmazból vesz fel értékeket. Az időváltozó $t \in \mathbb{Z}$, a rendszer állapota pedig $\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{2L}(t))$. Az időfejlődést úgy konstruáljuk, hogy egy lépésben szimultán végzünk frissítéseket két rácspontos blokkokon, úgy, hogy váltogatjuk a blokkokra való felbontást. A lokális frissítési szabályt egy $U : X^2 \rightarrow X^2$ leképezés adja meg, a teljes mozgásegyenlet pedig

$$\Psi(t+1) = \begin{cases} \mathcal{V}_1 \Psi(t), & \text{ha } t = 2k+1, \\ \mathcal{V}_2 \Psi(t), & \text{ha } t = 2k, \end{cases}$$

ahol a váltakozó frissítési szabályok a következők:

$$\mathcal{V}_1 = U_{12} U_{34} \dots U_{2L-1, 2L}, \quad \mathcal{V}_2 = U_{23} U_{45} \dots U_{2L, 1},$$

ahol $U_{j,k}$ azt jelenti, hogy a frissítést a j és k rácspontokon végezzük el.

- Az egyik legegyszerűbb esetben $N = 2$ és az U leképezés a permutáció: $U(x, y) = (y, x)$. Milyen dinamika valósul így meg? Adjuk meg a rendszer $\Psi(t)$ állapotát a $\Psi(0)$ kezdeti feltétel segítségével!
- Vegyünk egy általános U -t! Mi a rendszerben az információ terjedésének maximális sebessége? Mikor lesz visszafordítható a dinamika, vagyis mikor tudjuk $\Psi(0)$ -t rekonstruálni egy későbbi $\Psi(t)$, $t > 0$ segítségével?
- Vegyünk egy $N \geq 3$ egész számot és tekintsük az alábbi lineáris leképezést:

$$U(x, y) = (x + y, x - y) \text{ mod } N,$$

Itt *mod* a maradékosztályt jelenti. Milyen N esetén lesz ez a leképezés reverzibilis?

- A legutóbbi leképezés a „hullámterjedés” egy ultra-diszkrét modellje. Oldjuk meg ezt a modellt! Vagyis fejezzük ki $\Psi(t)$ -t $\Psi(0)$ segítségével! A legegánsabb megoldás a véges testek vagy gyűrűk feletti algebraival dolgozna, azonban nyugdtan használjuk a komplex számokat közbülső objektumként! Mi a rendszer Green-függvénye?
- A visszatérési idő az a legkisebb T szám, melyre igaz, hogy $\Psi(2T) = \Psi(0)$ minden kezdeti feltétel esetén. Legyen most $N = 3$ és vegyük a fenti lineáris leképezést. Végezzünk numerikus kísérleteket, és határozzuk meg a T visszatérési időt az L „térfogot” függvényében! Mikor lesz T kicsi, és mikor lesz nagy?

(Pozsgay Balázs)

27. Az egydimenziós ferromágneses Ising model energiája

$$E(S_1, S_2, \dots, S_N) = -J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1},$$

ahol $J > 0$, $S_i \in \{\pm 1\}$, és $N \gg 1$. Átlagtér közelítésben a valószínűségi eloszlást egyrészeske eloszlások szorzatával közelítjük, de ez hibásan fázisátalakulást jósol. Legyen

$$P(\underline{S}) = \frac{P_{12}(S_1, S_2) P_{23}(S_2, S_3) \dots P_{N-1, N}(S_{N-1}, S_N)}{P_2(S_2) P_3(S_3) \dots P_{N-1}(S_{N-1})}$$

az új variációs próbaeloszlásunk, ahol $P_i(S_i) = \sum_{S_{i+1}} P_{i, i+1}(S_i, S_{i+1}) = \sum_{S_{i-1}} P_{i-1, i}(S_{i-1}, S_i)$.

a) Mi a variációs szabadenergia? b) Történik-e fázisátalakulás? c) Mi a korrelációs függvény?

(Veszeli Máté)

28. Pista bácsi a Nagy Szuperszonikus Mentőautó-Ütköztető közelében lakik. Ő legalábbis így nevezi a puszta közepén épült furcsa létesítményt. Egy habókos milliárdos a fejébe vette ugyanis, hogy a betegszállítás felgyorsítása érdekében hangnál sebesebben suhanó mentőautókkal látja el a nagyvárosokat. Egyelőre addig jutott, hogy épített egy sok kilométer átmérőjű, kör alakú tesztpályát, amit a kíváncsi tekintetek elől magas palánk zár el. A palánkon a fény nem hatol át, a hang annál inkább. A tesztpályán állandó, hangnál nagyobb sebességgel futnak körbe-körbe a mentőautók, persze folyamatosan szirénázva. Még jó, hogy nem zavarnak senkit.

Kivéve Pista bácsit. Ő a tesztpályától néhány kilométerre lakik egy tanyán, és hétfő este a kocsmában meséli élményeit a barátainak. Akik persze már sok furcsa álhírt hallottak és még többet adtak tovább a tesztpálya valódi rendeltetéséről.

– Én mondom nektek – kezdi Pista bácsi a harmadik korsó sör után – ez a Muszkli vagy kicsoda a teleportációval kísérletezik ott a palánk mögött. Tudjátok, ahogy Kirk kapitány szokta. Valahogy lesugározzák a mentőautókat...

A többiek hiszik is meg nem is. Megtanulták Carl Sagantól, hogy erős állítások erős bizonyítékokat igényelnek. Pista bácsi tehát nekilát a bizonyításnak.

– Tudjátok, hogy igen jó fülem van. Már az Isonzónál is előre megmondtam a gránát fűtyüléséből, hogy hol fog becsapódni. Kiültem hát a házam elé, behunytam a szemem, és elkezdtem hallgatózni. A hangok irányából és változásából hamarosan megállapítottam, hogy három állandóan szirénázó mentőautó kergetőzik a pályán körbe-körbe, kettő az egyik irányba megy, a harmadik pedig velük szembe. De aztán jaj! – a két egymással szemben haladó mentőautó hangja visításba csapott át, majd hangos csattanással összeütköztek. Na ezeknek annyi – gondoltam. De nem! Ugyanabban a pillanatban a két autó egy újabb hangos csattanás kíséretében megjelent a pálya egyik közelebbi pontján, és mintha mi sem történt volna, távolodni kezdtek egymástól. Teleportáció – mondtam magamnak –, semmi más nem lehet!

– Esetleg kvantumteleportáció – szúrta közbe a furfangos diák.

– Valami olyasmi lehet, mint a „Vissza a jövőbe!” című filmben. Ott az időutazáshoz kellett felgyorsítani a Doki autóját, itt meg csak akkor mehet végbe a teleportálás, ha nagy sebességgel összeütköznek a kocsik – morfondírozott Pista bácsi. – Nem mondom, eléggé kényelmetlen módja az utazásnak.

– És mit csinált eközben a harmadik autó? – kérdezte a kocsmáros.

– Az csak ment tovább a saját pályáján, tőlem távolodva. No most valahogy megúszták –, gondoltam magamban. De aztán az előző ütközést és teleportálást túlélte egyik autó elkezdett közeledni az addig érintetlen harmadikhoz, összecsattantak, és – láss csodát – ők is átteleportálódtak a pálya egy közelebbi pontjába. És képzeljétek el, ez így ment utána egész nap, szépen szabályosan ismétlődve! Az ütközések mindig ugyanott történtek, ahogy a teleportáció utáni is mindig ugyanabban a pontban materializálódtak az autók. Ha benézhetnék a palánk mögé, ezeken a helyeken megláthatnám a teleport adó- és vevőberendezését...

– Márpedig ebből egy szó sem igaz! – vágott közbe a furfangos diák. – Ma délután én is arra jártam, felküldtem a drónomat, hogy benézzen a palánk mögé. És láttam, hogy a tesztpálya csak egy egyszerű kör, egyáltalán nincs ott semmiféle teleport, adó vagy vevő berendezés. És ami fő, azt is láttam, hogy szó sincs a mesebeli három, drámai kalandokon átmenő kocsiról: egyetlen mentőautó rója unalmas köreit a pályán.

Pista bácsi megszégyenülten elhallgatott. A kocsmá törzsközsége tanácstalanul nézett. Kinek higgyenek? Pista bácsi öreg, megbízható kocsmatöltelék, még sohasem kapták hazugságon. A furfangos diák viszont rögtön elővette és levetítette a drónfelvételeket.

Még most is ott töprengenének, ha be nem zárt volna a kocsmá. Nekünk viszont egyelőre csak az a kérdésünk:

Hányszorosa a tesztpályán keringő szuperszonikus mentőautó sebessége a levegőben terjedő hang sebességének? *Számadatot kérünk!*

Pótkérdés: a körpálya hányad részét ugrották át Pista bácsi mentőautói a teleportáció során?

Pót-pótkérdés: Hová érkeznenk, ha tovább haladnánk a teleportáció indulási és érkezési pontját összekötő egyenesen?

Pó-pót-pótkérdés: Pista bácsi kedden este ugyanezt a történetet mesélte el, de akkor szerintem már öt mentőautó keringett a pályán, amik közül kettő rendszeresen összeütközött és telepor-tálódott. A furfangos diák pedig ismét bemutatott egy drónfelvételt az általa látott egyetlen szuperszonikus mentőautóról. Kérdéseink változatlanok.

Szerdán este viszont Pista bácsi új hipotézissel hozakodott elő:

– Ma is gondosan füleltem, és most már amondó vagyok, hogy mégsem teleportáció folyik a palánk mögött. Most is sorra jelennek meg a pálya egyik hozzám közeli pontjában a mentőautópárok, és rohannak szerteszét, a pálya egy távoli pontjában pedig összeütköznek és nyomtalanul eltűnnek. Viszont ez nem ugyanakkor történik, mint a megjelenésük. Szóval inkább úgy gondolom, hogy egy fehér és egy fekete lyukat telepítettek a kör két pontjára, az egyik ütemesen köpi ki az autópárokat, a másik meg sorra nyeli el őket. Persze az is lehet, hogy egy autóból és egy antiautóból álló pár keletkezik és annihilálódik újra meg újra...

A furfangos diák persze most is ragaszkodott az unalmas elméletéhez az egyetlen keringő autóról.

Pót-pót-pót-pótkérdésünk egyszerúen ennyi: Mi történt a pályán keddről szerdára virradóra?

(Dávid Gyula)

`\end{document}`