

A 47. ORTVAY RUDOLF

FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI

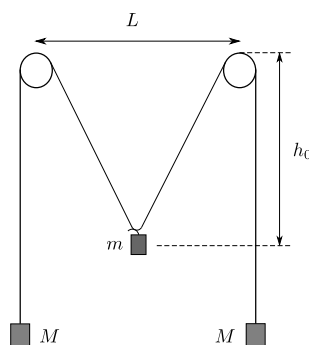
2016. október 28 – november 7.

1. A traktorok első kereke általában lényegesen kisebb, mint a hátsó. Manapság sok traktorgyár olyan traktort gyárt, melynek mind a négy kereke nagy. Miért volt előnyös a kisebb első kerék, és mi okozta azt a változást, hogy az első kerekek nagyok lettek? Mi az előnye a nagy keréknek? (A traktorok mind hátsókerék meghajtásúak.)



(Tichy Géza)

2. Mekk Mester függőlegesen felfelé lövő csúzlit szeretne készíteni. Tervrajza az ábrának megfelelően a következő: két, azonos magasságban, egymástól L távolságban levő állócsigán átvetett fonál végeire egy-egy M tömegű testet erősít. (A csigák átmérője elhanyagolható az L távolsághoz képest.) A fonál közepére akasztott kampóra egy m tömegű testet akaszt az állócsigák alatt h_0 mélységben. A csúzlit úgy akarja elindítani, hogy a középső test elengedi.
- a) Első kísérleténél a $Q = M/m$ és az $x_0 = h_0/L$ paramétereket véletlenül úgy választotta meg, hogy a középső test nemhogy felfelé, hanem pont ellenkezőleg lefelé indult el. Milyen paramétertartományban végezte ezt a kísérletét?
- b) Másodszor azt tapasztalta, hogy adott Q értéknél a középső testet elengedve az nem mozdult el semerre. Azt gondolta, ha egy kis lökést ad neki, akkor beindítja a csúzlit. Nem ez történt. A középső test rezegni kezdett. Milyen körfrekvenciát mért Mekk Mester a rezgésre?
- c) Harmadik kísérletét már gondosabban tervezte, azaz úgy választotta meg Q -t és x_0 -t, hogy a csúzli a középső testet már fellötte. Mekkora volt a középső test sebessége akkor, amikor az a csúzlirol levált?
- d) Mekk Mester úgy találta, hogy szép eredményeket ér el akkor is, ha $h_0 = 2L$ mélységből indítja a csúzlit, és a tömegeket egyformára választja: azaz $M = m$. Mennyi ideig tartott ennél a kísérletnél a csúzli rendeltetésszerű üzem módja (azaz mennyi idő múlva vált le a kötélről a kampóra akasztott középső test)? Ugyanebben a kísérletben milyen h mélységben volt a középső test sebessége a legnagyobb, és mekkora volt ez a sebesség?



(Simon Péter és Csordás András)

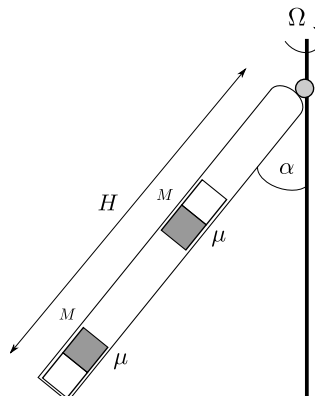
3. Egy kétágú létra lábai m tömegűek, felül egy súrlódásmentes csukló tartja össze őket. A létra tetejére egy M tömegű testet rögzítünk. A $t = 0$ időpillanatban a létra szárait összekötő zsinag elszakad, és a létra két lába szétcsúszik. Adjuk meg a földet érés idejét a $Q = M/m$ paraméter és a két szár kezdeti $2\alpha_0$ nyílásszöge függvényében! Mekkora az M tömeg sebessége a becsapódás pillanatában? A létra két szára homogén rúdnak tekinthető, és alsó végük súrlódásmentesen mozog a talajon.

(Cserti József)

4. Egy magas torony mellé egy függőleges csövet illesztünk. A csőbe a torony tetejénél beleejtünk egy nagyobb labdát, majd egy idő múlva utánaejtünk egy kisebbet. A kis labda nekiütközik a földről időközben visszapattant nagyobb labdába, és elindul felfelé. Az ütközések tökéletesen rugalmasak, a közegellenállás elhanyagolható. (A cső csak arra szolgál, hogy megakadályozza a labdák oldalirányú eltévelyedését, súrlódási erőt nem fejt ki.)
- Adjunk korlátot arra, hogy a torony magasságának legfeljebb hányszorosaig juthat így el a kis labda!
 - A második labda után egy harmadik, még kisebb labdát is leejtünk a toronyból, amely a már felfelé tartó második labdáról pattan vissza, és így tovább. Legfeljebb milyen magasra juthat az n -ik labda? Milyen időközönként ejtsük egymás után a labdákat, hogy a lehető legjobban megközelítsük a maximális elérhető magasságot?
 - Legyen az egymást követő labdák tömege rendre fele az előző labdáénak! Ha a labdákat az Eiffel-toronyból potyogtatjuk, hány labda kell a szökési sebesség eléréséhez?
 - Mekkora az így elkészített „rakétakilövő” berendezés hatásfoka? A befektetett energia hányad része összpontosul az utolsó, a Földet elhagyó labdára?

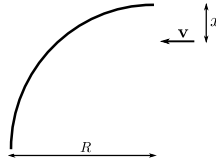
(Dávid Gyula)

5. Egy vékony falú, H hosszúságú, elhanyagolható tömegű üvegcső alsó végébe kicsiny, M tömegű, μ mágneses momentumú mágneset rögzítünk. A mágneses momentum vektora a cső irányába mutat. A csőben egy ugyanilyen, az előzővel szembe fordított mágnes csúszkálhat súrlódás nélkül. A cső felső vége egy függőleges tengelyhez csatlakozik. A tengelyt a függőleges irány körül állandó Ω szögsebességgel megforgatjuk. A gravitációs gyorsulás értéke g .
- A cső felső végét a tengellyel állandó α szöget bezáró helyzetben rögzítjük. Hol lesz a mozgó mágnes egyensúlyi helyzete, és milyen frekvenciájú rezgéseket végez a mágnes az egyensúlyi helyzet körül?
 - A helyzet hasonló az előzőhöz, de az üvegcső felső végét most súrlódásmentes csukló rögzíti a függőleges tengelyhez. Hol van(nak) a rendszer egyensúlyi helyzete(i), és milyen rezgéseket végez a rendszer az egyensúlyi helyzet(ek) körül?



(Cserti József és Dávid Gyula)

6. Egy vízszintes lapon álló, R sugarú, negyedkörív alakú fal homorú oldalához érkezik egy test a vízszintes lapon v sebességgel csúszva, a fal széléhez húzott érintővel párhuzamosan, a fal szélétől x távolságra. Súrlódás sehol sincs. Hány pattanás után, és mekkora sebességgel hagyja el a test a falat, ha az ütközés a fallal a) tökéletesen rugalmas, b) tökéletesen rugalmatlan? Vizsgáljuk az $x \rightarrow 0$ határesetet!



(Tichy Géza)

7. Van egy dobókockánk, amellyel dobva azt tapasztaljuk, hogy az 1-es dobás valószínűsége 50 %, míg a többi szám esélye egyenként 10 %. Mit tudunk mondani a kocka tulajdonságairól (pl. súlypont, tehetetlenségi tenzor, stb.)?

(Balogy Zsolt)

8. Elemezzük Felix Baumgartner ugrását az alábbi linkeken megtalálható információk alapján:

<https://youtu.be/raiFrxbHxV0>,

<http://oroszl.web.elte.hu/szamprob/notebooks/Package05/data/BAUMGARTNER/>

Készítsünk el azt a legegyszerűbb modellt, ami az adatokat lehető legpontosabban magyarázza! Vegyük figyelembe

- a légkör tulajdonságainak magasság szerinti változását,
- a zuhanó test orientációjának és lehetséges alakjának változását!

Részletesen térjünk ki az esés főbb szakaszainak elemzésére! Mennyiben alakulhatott volna másképp az esés kimenetele, ha egy élő ember helyett egy élettelen bábu végzi az ugrást, melynek mozgásszerveit nem lehet kontrollálni?

(Oroszlány László)

9. Számos fizikakönyv magyarázza a Doppler-effektust a mentőautó példáján: figyeljük meg a nyílegyenesen felénk közeledő mentőautó hangjának magasságát, majd tegyük meg ugyanezt a tőlünk távolodó mentőautóval is! Ám akik ezt a kísérletet a valóságban is végre akarták hajtani, rosszul jártak, mert a mentőautó elgázolta őket.

Legyünk hát mi óvatosabbak! Álljunk félre a $V < c$ sebességgel (ahol c a hang sebessége a levegőben), egyenes vonalban mozgó mentőautó útjából, az úttól H távolságra! Számítsuk ki az állandó ω_0 frekvenciával szirénázó mentőautó észlelt hangjának frekvenciáját az észlelési idő függvényében! Ábrázoljuk a függvényt! Vizsgáljuk meg a szuperszónikus, $V > c$ sebességgel közlekedő mentőautó esetét is!

A gondos fizikus persze nem csak a mentőautó hangjának magasságát, hanem irányát is megfigyeli. Ugyanakkor optikai eszközökkel (pl. a szemével) is követi a mentőautó helyzetét (a fény sebességét jelen esetben végtelennek tekinthetjük). Ábrázoljuk a látott mentőautó irányszögének függvényében a hallott mentőautó irányszögét! Diszkutáljuk a szubszónikus ($V < c$), a szuperszónikus ($V > c$) és a kritikus ($V = c$) sebességű mentőautók esetét!

(Dávid Gyula)

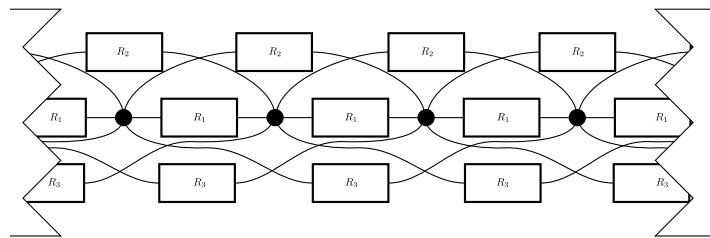
10. Egy tökéletesen hőszigetelt konyhában bekapcsolunk egy hűtőszekrényt. Hogyan változik időben a fridgesider átlagos áramfelvétele? Tegyük fel, hogy a hűtőszekrény ideális hatásfokú hőpumpaként működik!

(Bodor András)

11. Elhanyagolható közegellenállású, vékony, magas lábakra egy függőleges helyzetű, vékony falú hengerpalástot helyezünk el. A hengerpalástba épített elektromos vagy forróvízes fűtőberendezés gondoskodik arról, hogy a palást belső felülete állandóan melegebb legyen a vele érintkező levegőnél. A henger külső felülete hőszigetelt, ott a fűtés hatása nem érzékelhető.
- A henger belsejében a levegő függőleges irányú mozgást végez. Mi adja az impulzust a felemelkedő levegőnek?

(Hlavathy Zoltán)

12. Vizsgáljunk egy egydimenziós periodikus ellenállás-hálózatot, melyben az ábrán fekete ponttal jelölt forrasztási pontok közé R_i ellenállásokat helyezünk! Az első szomszédok közé R_1 , a második szomszédok közé R_2 ellenállások kerülnek, és így tovább. Mekkora az eredő ellenállás két tetszőleges pont között, ha csak az első és másodsomszéd csatolást vesszük figyelembe? Mekkora eredő ellenállást kapunk két tetszőleges pont között, ha az első N -szomszéd csatolást vesszük figyelembe? Numerikus megoldás esetén vázoljuk a megoldó algoritmust!



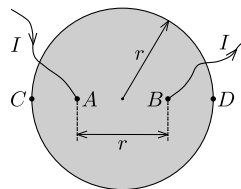
(Oroszlány László)

13. Valahol egy messzi-messzi galaxisban található egy R ellenállásból álló objektum, ahol az ellenállások az $\mathbf{r} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z$ helyvektorral adott rács élein helyezkednek el. Itt $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$ és $0 \leq n_z \leq D$, továbbá $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ az x, y és z irányba mutató egységvektorok.

Az objektum felületén ($n_z = 0$) lakó hangyák szeretnék meghatározni világuk D vastagságát, ezért megméri az R_b eredő ellenállást két szomszédos rácspont között. Segítsünk a hangyáknak és határozzuk meg az $R_b(R, D)$ függvényt! Vizsgáljuk meg a $D = 0$ és a $D \rightarrow \infty$ határeseteket is!

(Széchenyi Gábor és Cserti József)

14. Az ábrán látható r sugarú, d vastagságú ($d \ll r$) fémkorong A pontjába I erősségű áramot vezetünk, B pontjából pedig elvezetjük azt. Mekkora feszültség mérhető a korong C és D pontjai között? A korong anyagának fajlagos ellenállása ρ .



(Vigh Máté)

15. Anizotróp, de homogén anyagban a dielektromos állandó helyébe az ϵ tenzor lép. Adjuk meg ebben a közegben egy végtelen hosszú, egyenletesen feltöltött vonal ekvipotenciális felületeinek egyenletét!

(Tichy Géza)

16. A súlytalanság állapotában egy R sugarú higanycsepp lebeg. Ha a cseppet gyenge E_0 térerősségű, homogén elektromos térbe helyezzük, a csepp a tér irányában kissé megnyúlik. Adjuk meg a higanycsepp egyensúlyi alakját! A higany felületi feszültsége α , és tegyük fel, hogy $\epsilon_0 E_0^2 R \ll \alpha$!

(Vigh Máté)

17. Vizsgáljunk olyan töltéskonfigurációkat, amelyeknek az elektromos tere sehol sem nulla! A legegyszerűbb példa erre egy ponttöltés. Két ponttöltés szintén ilyen konfigurációt alkot, ha az össztöltésük (a nulladik multipólus-momentum) nulla.
- a) Tekintsünk két $-q$ ponttöltést és egy $2q$ nagyságú töltést az őket összekötő szakasz felező-pontjában! Vegyük észre, hogy ennek a konfigurációnak eltűnik a nulladik és első multipólus-momentuma, azaz az össztöltése és dipólus-momentuma nulla. Mutassuk meg, hogy ennek a konfigurációnak az elektromos térerőssége sehol sem nulla!
- b) Mutassuk meg, hogy ha n darab egy egyenesre vagy akár síkra eső ponttöltés elektromos térerőssége sehol sem tűnik el, akkor az első $(n - 2)$ multipólus-momentumuk nulla!
- c) Adjunk minden n -re példát olyan n ponttöltésből álló konfigurációra, amelynek az első $(n - 2)$ multipólus-momentuma eltűnik! Vannak nem egy egyenesbe eső ilyen konfigurációk is?

(Zimborás Zoltán és Farkas Szilárd)

18. A szén nanocsövek jó példák a természetben létező kvázi-egydimenziós rendszerekre. A félvezető nanocsövekben az elektronok m^* effektív tömeggel rendelkeznek, és mozgásuk csak a nanocső iránya mentén lehetséges. Az elektronok közti Coulomb-kölcsönhatást részben leárnyékolja a nanocsövet tartó szubsztrát – ezt a jelenséget a dielektromos állandó megnövekedett értékével ($\epsilon \approx 2 - 4$) szokás figyelembe venni. A külső kapuelektrodák általában egy parabolikushoz közeli alakkal leírható bezáró potenciált hoznak létre, amely az elektronokat a nanocsőbe zárja.

A fentieket figyelembe véve modellezzük a nanocsövet m^* effektív tömegű elektronok végtelen egydimenziós rendszerével, amelyeket egy parabolikus potenciál tart bezárva, és az egymás közötti Coulomb-kölcsönhatásukat egy ϵ dielektromos állandójú közeg közvetíti!

Ebben a feladatban tekintsük az elektronokat klasszikus részecskéknek, és határozzuk meg N elektron alapállapotú konfigurációjának energiáját az N részecskeszám függvényében! Számítsuk ki a töltések térbeli eloszlását is! Vizsgáljuk meg az igen nagy N részecskeszám határesetét! Ha a részecskék száma $N = 2$ vagy $N = 3$, analitikus eredményeket is levezethetünk.

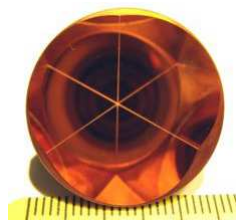
(Zaránd Gergely)

19. A monitoromra a napfelkelte-kori égbolt színes képét szeretném háttérnek feltenni, a lehető leghitelesebben, a Nap korongjának a horizonton megjelenése előtti utolsó másodpercbeli állapotban. Tétélezzünk fel ideális esetet, előző napi nagy esők utáni pormentes levegőt és felhőmentes hajnalt! A monitor alsó széle legyen a horizont, $\pm 90^\circ$ -os látószögben a Nap iránya körül, függőlegesen a monitor felső szélének közepe legyen a 90° (zenit)! Az egyes pixelek RGB értékeit szeretném megkapni.



(Sánta Imre)

20. Egy 532 nm-es hullámhosszú, 1 mm átmérőjű, TEM₀₀ módusú lézer fényét ráirányítjuk egy tőle 3 km távolságban lévő, 60 mm átmérőjű sarokprizmára. Milyen lesz a visszavert fény intenzitás-eloszlása a lézer környezetében?



(Sánta Imre)

21. A hang keltését és terjedését az inhomogén D'Alembert-egyenlettel írhatjuk le:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} - \Delta u = f(t, \mathbf{r})$$

Legyen a megfigyelő a háromdimenziós tér origójában! Egy pontszerű hangforrás állandó V sebességgel halad az origótól a távolságban levő egyenesen. Számítsuk ki az origóban észlelt hangerősséget, azaz a D'Alembert-egyenlet megoldását az idő függvényében! Vizsgáljuk meg a szubszónikus ($V < c$), a szuperszónikus ($V > c$) és a kritikus ($V = c$) sebességek esetét, valamint a $V \rightarrow 0$, $V \rightarrow c \pm 0$ és $V \rightarrow \infty$ határeseteket!

Ha még van energiánk, ismételjük meg a számítást 1 + 2, illetve 1 + 4 dimenziós téridőben is!

(Dávid Gyula)

22. Egy L hosszúságú fényelemmel szemben, vele párhuzamosan ugyancsak L hosszúságú fényforrás helyezkedik el. A fényelem két végéből induló vezetékek egy árammérő (és a mért értéket rögzítő) berendezéshez csatlakoznak. A fényelem előtt kis távolságban, vele párhuzamosan elszóhan egy $2L$ nyugalmi hosszúságú vékony lemez, amely nyugalmi helyzetben teljesen eltakarná a fényelemet. A lemez sebessége $12/13 c$.

Mit mutat a fényelem áramának regisztrátuma? Lesz-e olyan időszak, amikor az észlelt áramerősség nullára csökken?

Írjuk le a jelenséget a mozgó lemezhez rögzített vonatkoztatási rendszerből is!

(Skirka Péter ötlete nyomán Dávid Gyula)

23. Az origóban rögzített centrum által keltett gömbszimmetrikus, sztatikus négyesskalár mezőben relativisztikus részecske kering. A részecske teljes nyugalmi tömege a skalármezőtől származik. Adjuk meg a skalármező értékének sugárfüggését, ha a részecske pályája ellipszis, melynek a) középpontjában, b) fókuszában helyezkedik el a vonzócentrum!

(Dávid Gyula)

24. Egy m_1 és egy m_2 tömegű égitest igen elnyúlt ellipszispályán kering egymás körül ($\varepsilon \approx 1$). A rendszer elszigetelt, semmilyen más égitest nincs a közelben. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változnak meg a pálya adatai a gravitációs hullámok kisugárzása következtében! Becsüljük meg, hogy mekkora a karakterisztikus ideje annak a folyamatnak, amely az elnyúlt ellipszispályát majdnem kör alakúvá alakítja!

(Dávid Gyula)

25. Werner Heisenberg és Neumann János egy $m = 1/2$ tömegű részecskének az egydimenziós $[-a, a]$ intervallumon való mozgását tanulmányozzák. A részecske Hamilton operátora $\hat{H} = -\nabla^2$ ($\hbar \equiv 1$), hullámfüggvénye $\psi(x) = \sin(x^2 - a^2)/\sqrt{N}$, ahol N normálási konstans. A két tudóst érdekli az energia-idő bizonytalansági reláció teljesülése a fenti állapotban, ezért az energia szórásához kiszámítják az

$$i) \int_{-a}^a \psi^*(x)(-\nabla^2)\psi(x) dx$$

$$ii) \int_{-a}^a \psi^*(x)\nabla^4\psi(x) dx$$

mátrixelemeket. Egy bizonyos a értéknél Heisenberg felszisszen. Mi ez az érték, és hogyan nyugtatja meg barátját Neumann János?

(Fejős Gergely)

26. A szén nanocsövek jó példák a természetben létező kvázi-egydimenziós rendszerekre. A félvezető nanocsövekben az elektronok m^* effektív tömeggel rendelkeznek, és mozgásuk csak a nanocső iránya mentén lehetséges. Az elektronok közti Coulomb-kölcsönhatást részben leárnyékolja a nanocsövet tartó szubsztrát – ezt a jelenséget a dielektromos állandó megnövekedett értékével ($\epsilon \approx 2 - 4$) szokás figyelembe venni. A külső kapuelektrodák általában egy parabolikushoz közeli alakkal leírható bezáró potenciált hoznak létre, amely az elektronokat a nanocsőbe zárja.

A fentieket figyelembe véve modellezzük a nanocsövet m^* effektív tömegű elektronok végtelen egydimenziós rendszerével, amelyeket egy parabolikus potenciál tart bezárva, és az egymás közti Coulomb-kölcsönhatásukat egy ϵ dielektromos állandójú közeg közvetíti!

Ebben a feladatban az elektronokat a kvantummechanika segítségével írjuk le. Határozzuk meg a két bezárt elektronból álló rendszer alapállapotú konfigurációját (hullámfüggvényét és a megfelelő töltéssűrűséget), valamint energiáját! Keressük meg az első gerjesztett állapotot is, és határozzuk meg ennek spinjét és energiáját! A fenti két állapot közti felhasadás a kicserélődési kölcsönhatás J csatolási állandójával jellemezhető. Számítsuk ki J értékét a parabolikus bezáró potenciál erősségének függvényében! Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a rendszerben az elektronok feles spinű részecskének tekinthetők. (Ténylegesen a nanocsőben mozgó elektronoknak emellett még egy $\tau = \pm 1$ kiralitás-kvantumszámuk is van, ami a nanocső tengelye körüli impulzuszórájukat írja le.)

(Zaránd Gergely)

27. A Brouwer-Büttiker-Prete-Thomas formula szerint egy adiabatikusan lassan változó szórási tartomány infinitezimálisan kicsiny $d\tau$ idő alatt

$$dq_l = \frac{i}{2\pi} \text{Tr} [P_l \partial_\tau S(\tau) S^\dagger(\tau)] d\tau$$

töltést pumpál az l -edik vezetékbe, ahol S a szórás mátrix, P_l pedig a szórás mátrixnak az l -edik vezetékhez tartozó részére vetítő projektor:

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Alkossunk egy olyan egydimenziós szórási modellt, melyben a részecskék szórását leíró szórás mátrix független a részecskék energiájától, és melynek szórócentruma legalább két paraméterrel jellemezhető!

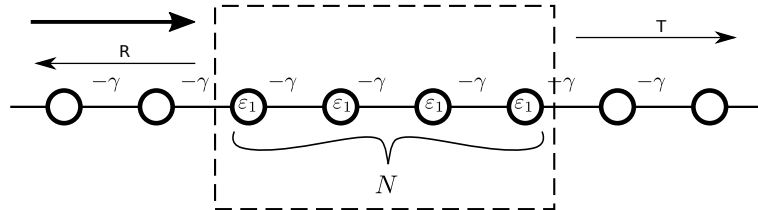
b) Avron és munkatársai megmutatták, hogy bizonyos optimalitási kritériumok teljesítése esetén az adiabatikus kvantumpumpák ciklusonként egész számú töltést mozgatnak keresztül a rendszeren (<https://arxiv.org/pdf/math-ph/0105011v2.pdf>). Vizsgáljuk meg, hogy az a) részfeladat során megalkotott modell milyen adiabatikus ciklus esetén pumpál egész számú töltést!

(Oroszlány László)

28. Vizsgáljunk az egydimenziós szórásproblémát szoros kötésű közelítésben! A szórási tartomány álljon N darab rácspontból, melyeken a potenciált ε_1 -nek választjuk! A rendszer többi részében a potenciál zérus. A hopping tagok a rendszerben mindenhol $-\gamma$ értéket vesznek fel.

a) Határozzuk meg a szórási tartományon szóródó $E = 0$ energiájú részecskék transzmissziós együtthatóját N és ε_1 függvényében a $0 < \varepsilon_1/\gamma < 0,1$ paramétertartományban!

b) A kapott eredményeket interpretáljuk alacsony energiás effektív modellek segítségével! Alkossuk meg a vizsgált szórási probléma effektív leírását a burkolófüggvény-közelítés segítségével! A megalkotott effektív modell keretein belül értelmezzük a transzmissziós együttható N -függésében tapasztalható szisztematikus változásokat!



(Oroszlány László)

29. A $t = 0$ időpontban 1000 db független radioaktív atommagunk van egy dobozban. Felezési idejük 10 óra. Leányelemük nem radioaktív. Mikor van az az időpillanat, amikor 66 %-os valószínűséggel állíthatjuk, hogy az utolsó radioaktív atommag is elbomlott?

(Horváth Ákos)

30. Egy valós, tömeges skalármező kvantumtérelméletét 1+1 dimenzióban a

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} : \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, 0) \right)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2(x, 0) :_m + : V(\varphi(x, 0)) :_m dx$$

Hamilton-operátor írja le ($\hbar = c = 1$). A skalármező az alábbi alakba írható:

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (a(k) e^{i(kx - \omega_k t)} + a^\dagger(k) e^{-i(kx - \omega_k t)}) dk$$

ahol $a^\dagger(k)$ és $a(k)$ a k impulzusú, m tömegű részecskét keltő/eltüntető operátorok:

$$[a(k), a^\dagger(k')] = \delta(k - k')$$

továbbá $\omega_k = \sqrt{m^2 + k^2}$, a $: :_m$ kettőspontokkal pedig a normálrendezést jelöltük, ami alatt azt értjük, hogy a közbezárt kifejezés tagjaiban a keltő operátorok mindig az eltüntető operátoroktól balra helyezkednek el.

Írjuk fel *ugyanennek* a rendszernek a Hamilton-operátorát úgy, hogy a normálrendezést egy $\mu \neq m$ tömegű szabad bozon sémájában végezzük el, azaz legyen

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} : \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 :_\mu + : \tilde{V}(\varphi) :_\mu$$

Adjuk meg egzaktul a $\tilde{V}(\varphi)$ függvényt, ha a) $V(\varphi) = g\varphi^{2n}$, b) $V(\varphi) = \frac{1}{b^2} \cos(b\varphi)$.
(A sémaváltás során az integrálás alatt megjelenő konstans tagot hagyjuk el.)

(Lájer Márton Kálmán)

31. Tekintsünk két egydimenziós, egységnyi tömegű csatolt harmonikus oszcillátort a következő Hamilton-függvénnyel:

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_1^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\omega_2^2}{2}(x_1 - x_2)^2.$$

A rendszer alapállapotban van, de az egyik oszcillátor teljesen láthatatlan, és csak a másikon tudunk méréseket végezni. Mekkora az utóbbi hőmérséklete?

(Fejős Gergely)

32. Tekintsük két kölcsönható ϕ és χ skalártér elméletét a következő Lagrange-függvénnyel:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \frac{1}{2}M^2\chi^2 - g\phi^2\chi.$$

A χ részecske elbomolhat két ϕ részecskére. Mutassuk meg, hogy a χ részecske várható élettartama

$$\langle T \rangle = \frac{-M}{\text{Im}(\Pi(M^2))}$$

alakban adható meg, ahol $-i\Pi(p^2)$ a χ részecske sajátenergiája!

(Homa Gábor és Lisztes László)

33. Olyan fizikai rendszerekben, amelyekben az energiának felső határa van, létrejöhetnek negatív abszolút hőmérsékletű állapotok. Ilyen rendszerekben az entrópia csökken a belső energia növelésével. Tekintsünk egy ilyen N -részecskés rendszert, aminek Hamilton-függvénye

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{i,j=1}^N [(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j)^2 - \frac{1}{3}]$$

ahol \mathbf{n}_i minden i -re egy 3-dimenziós egységvektor, és $J > 0$. A rendszert jellemző mozgásegyenlet

$$\frac{d\mathbf{n}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}_i} \times \mathbf{n}_i = -J \sum_{j=1}^N (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j)(\mathbf{n}_j \times \mathbf{n}_i).$$

Könnyen belátható, hogy $|\mathbf{n}_i| = 1$ megmarad minden i -re, és az összenergián túl az $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{n}_i$ mennyiség is megmarad. Az $N \rightarrow \infty$ határesetben a rendszert az egységgömb-héjon értelmezett $\rho(\theta, \phi)$ részecskeszám-sűrűségfüggvény jellemzi. Határozzuk meg az \mathbf{L} -re tengelyszimmetrikus statisztikus egyensúlyban azt a $\rho(\theta)$ eloszlásfüggvényt, ami maximalizálja a

$$S = -k \int_{S_2} \rho \ln \rho d\Omega$$

Boltzmann-entrópiát, figyelembe véve, hogy az összenergia, valamint az \mathbf{L} és N mennyiség megmarad! Ábrázoljuk a rendszert jellemző

$$Q = \int_{S_2} (\cos^2 \theta - \frac{1}{3}) \rho d\Omega$$

rendparaméter hőmérsékletfüggését $|\mathbf{L}| = 0$ és $0,4N$ esetén! Stabilak-e a negatív abszolút hőmérsékletű egyensúlyi állapotok?

(Kocsis Bence)

34. Gyakran elhangzik, hogy a kovariáns módon mértékrögzített kvantumelektrodinamikában a mértékinvariancia a Ward-identitásokban van elrejtve. Tekintsük például a $\Gamma_{A^\mu\phi^\dagger\phi} \equiv \Gamma^\mu$ és a $\Gamma_{\phi^\dagger\phi} \equiv \Gamma$ valódi vertexek közötti jól ismert identitást:

$$q_\mu \Gamma^\mu(q, p) = \Gamma(p) - \Gamma(p + q),$$

ahol A^μ a négyespotenciál, ϕ egy komplex skalártér, a mértékcsatolást pedig $e \equiv 1$ egységnyinek választottuk. Ez az azonosság (formálisan) levezethető a $\langle 0|T(j^\mu(x)\phi(y)\phi^\dagger(z))|0\rangle$ korrelátor divergenciája Fourier transzformáltjának 1PI részére való vetítésével, ahol j^μ az elektromos áram. Ezen levezetés során viszont sehol sem kerül felhasználásra a mértékszimmétria.

Ez azt jelenti akkor, hogy a fenti azonossághoz mégsem szükséges a mértékinvariancia?

(Fejős Gergely)

35. Ebben a feladatban egy alternatív Univerzumot vizsgálunk. Ez az Univerzum három tér- és egy idődimenzióval rendelkezik, és térben egy nagy téglatestként képzelhetjük el. A téglatest oldalai L_x, L_y és L_z , térfogata V . A téglatest szemközti oldalaira a Teremtő ciklikus határfeltételt írt elő.

Az alternatív Univerzum teljes egészét kitölti egy ultrahideg atomokból álló Bose-Einstein kondenzátum. A kondenzátumot egy $\Psi(\mathbf{r}, t)$ komplex hullámfüggvény jellemzi. Ennek dinamikáját a következő, úgynevezett Gross–Pitaevskii egyenlet írja le:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \mu \right) \Psi(\mathbf{r}, t) + g \cdot \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t),$$

ahol \hbar a redukált Planck-állandó, m az ultrahideg atomok tömege, μ a kémiai potenciál, g pedig az atomi ütközéseket jellemző állandó. A kondenzátumot alkotó atomok számát jelölje N_c . A kondenzátum hullámfüggvényének abszolútérték-négyzete a kondenzátum helyi sűrűségét adja meg. Legyen továbbá $c = \sqrt{\frac{g}{m} \frac{N_c}{V}}$ egy sebesség-dimenziójú és $\xi = \frac{\hbar}{mc}$ pedig egy kicsi, hosszúság-dimenziójú paraméter!

Az alternatív Univerzumban intelligens lények élnek, méghozzá két, egymástól távoli kolónián. A két kolónia lakói úgy kommunikálnak egymással, hogy az alapvetően homogén Bose-Einstein kondenzátumban kis amplitúdójú perturbáló hullámokat keltenek. Az intelligens lények számára rendelkezésre álló közepesen fejlett technológia korlátai miatt csak a ξ hosszánál jóval nagyobb hullámhosszú hullámokat tudnak létrehozni a kondenzátumban.

Az egyik kolónián az intelligens lények vezető fizikusai világuk alapvető fizikai törvényeinek mibenlétéről folytatnak vitát. Míg Alice az éter létezése mellett érvel, addig Bob szerint az éter hipotézisre nincs szükség, mert világuk alapvetően Lorentz-invariáns.

Vajon kinek van igaza, Alicenak vagy Bobnak?

A vita eldöntéséhez írjuk fel a komplex hullámfüggvény kis perturbációinak egyenletét, majd gyártsunk az így kapott komplex egyenletből egy, az előbbinél magasabb deriváltakat tartalmazó valós hullámegyenletet! Az így kapott egyenletben a fent bevezetett c és ξ paraméterek fognak megjelenni. Elemezzük ezt az egyenletet Alice és Bob vitája szempontjából!

(Kónya Gábor)

36. A kicsiny, de igen öntudatos egyenlítői ország, Gumipart közszeretnek örvendő örökös diktátora, dr. Absoluto Zéró ismét magához rendelte udvari főfizikusát. Dr. Ali Tudde Mynek sóhajtván állt meg a hatalmas íróasztal előtt.

– Hallatlan! Radírja elnöke kétszer akkora Almazöld Elnöki rezidenciát építtetett, mint az én Rózsaszínű Palotám!

A főfizikus megrettent. Nem először kellett tudományos ismereteit a másik kicsiny, ámde büszke egyenlítői hatalommal folytatott évtizedes viszálykodás ügyeiben bevetnie. Félelme nem volt alaptalan, a diktátor ugyanis így folytatta:

- Ezt nem tűrhetem! Holnap helyezze üzembe a dr. Absoluto Zéróról elnevezett interkontinentális ballisztikus rakétát, és lője szét a radíriai elnöki palotát!
 - De Elnök úr! Ön három éve törölte a rakétaprogramot, a mérnököket és az elektronikusokat átírányította gumipitypangot szedni, a rakéták üzemanyagát pedig a propagandaminiszter Nemzeti Helikopterflottájának adta át...
 - Lárifári! De maguk tudósok mindig tudnak valami megoldást. A múltkor azt mesélte, hogy egy új tudományos elmélet szerint a Föld forog. Így van?
 - Így, de...
 - Hát akkor fogja azt a rakétát, dobja fel jó magasra, a Föld meg majd befordul alája, és ha jól csinálja, akkor Radíriára esik!
 - De hát egyetlen rakétánk sincs...
 - Sebaj! Láttam a múltkor azt a Bruce Willis filmet... Csináljon egy jó nagy követ, valami mesterséges üstököst, és lője fel függőlegesen az égbe! Aztán vigyázzon, mert személyesen ellenőrzöm a számításait – pontosan Radirbourgra pottyanjon!
 - Igenis, Elnök úr! Fél év múlva lesz a Gumiérés ünnepe, akkor ünnepélyes körülmények között feldobjuk a követ, és néhány óra múlva Radíriára zuhan...
 - Ez így nem lesz jó, túl rövid az idő! Ha épp a Gumiérés ünnepén esik egy meteor a radíriai elnöki palotára, akkor a Szabad Gumi Rádió azt fogja terjeszteni, hogy a mi kezünk van a dologban... Inkább repüljön az a kő egy egész napot, én azalatt elmegyek a gumipálmaerdőbe gumimókusra vadászni. Így aztán senki sem mondhatja másnap, amikor lecsap a ménkű, hogy mi is benne voltunk!
- Dr. Ali Tudde Mynék számításaiba temetkezett. A légellenállást szerencsére nem kellett figyelembe vennie, hiszen azt – a politikai ellenállás más formáival együtt – már az 1987-es Ortvay verseny idején hatályon kívül helyezték.
- Másnap bemutatta az elnöknek gumipálma-borítású laptopján a számítások eredményeként elkészült prezentációt: a Port Goomy főteréről feldobott, ezüstösen csillogó mesterséges meteor lassan eltért az iránytól, elegáns ívben röppent Radíria felé, majd egy napnyi repülés után becsapódott.
- Az elnöknek nem tetszett a megoldás:
- Már a múltkor megmondtam magának: mi nem beszélünk félre, és nem is lövöldözünk félre. Ha fel akarunk dobni egy követ, akkor azt pontosan felfelé tesszük! Amikor drága atyám, dr. Absoluto Minusz Egy gyermekkoromban kivitt a gumipálmák közé gumimókusra vadászni, megmutatta, hogyan kell elhajítani a bumerángot: nyílegyenesen felfelé! És én azóta is így teszek! Javítsa ki azt a nyavalyás programot! A lövedék egyenesen röppenjen fel az égbe, a többit intézze el a Föld, fordítsa alája Radíriát!
- A fizikus valamit babrált a programmal, és lám, a képernyőn a lövedék nemsokára már az elnök által megkívánt mozgást végezte: egyenesen hagyta el a Földet, majd szépen visszaesett Radíriára.
- Ez már igen! Egy jottányit se módosítson a kilövés sebességén! Szorgos népünk győzni fog!
- Gumipart szorgos népe valóban munkához látott. Néhány hónapnyi fáradságos munkával és több hegycsúcs lebányászásával elkészült a mesterséges meteor, majd a gumipálmák egész évnyi termésének felhasználásával lassan megszületett a világ legnagyobb csúzligumija is. A csúzli nyele további gumipálma-ligetek faanyagát nyelte el. De a Gumiérés ünnepére minden készen állott.
- Az ünnepen több ezer államilag kivezényelt önkéntes húzta a csúzlit – a Nemzeti Gumi Tv közben azt harsogta, hogy a feldobott kő a szorgos gumiparti nép jövő évi életszínvonalát szimbolizálva száll a magasba. A kő felrepült, függőlegesen, ahogy illik, a diktátor pedig elégedetten utazott el a gumimókusok erdejébe.
- Másnap kellemetlen hírt hoztak az éppen gumimókus-felsált ropogtató elnöknek a gumitalpú futárok: Port Goomy főterére egy hatalmas, csillogó, meteornek látszó test zuhant, és porrá zúzta a Rózsaszínű Palotát.
- Nekünk már csak egy kérdésünk maradt: Milyen messze van Radíria fővárosa Port Goomytól?

(Dávid Gyula)

\end{document}