

A 45. ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 2014. október 22 – november 3.

1. Egy társaság a következő játékot játssza: körbeülnek egy asztalt, és egy golyót adogatnak egymásnak körbe $1/2$ valószínűséggel jobbra vagy balra, mindig a közvetlen szomszédoknak. A játék menetekre van osztva, a golyó minden menetben ugyanattól az embertől indul, ő a játékmester. Egy menetnek akkor van vége, ha már mindenkinél járt a golyó, és az a nyertes, akihez a golyó utoljára került. (Így tehát a játékmester sosem győzhet.) Ha egy menetben megvan a nyertes, új menet kezdődik. Kinek milyen győzelmi esélyei vannak az asztal körül? Ha csatlakozik egy új játékos, aki annyira maximalista, hogy ő szeretne a legtöbbször nyerni, mit javasolnál neki, hova üljön a játékmesterhez képest?

(Egri Győző)

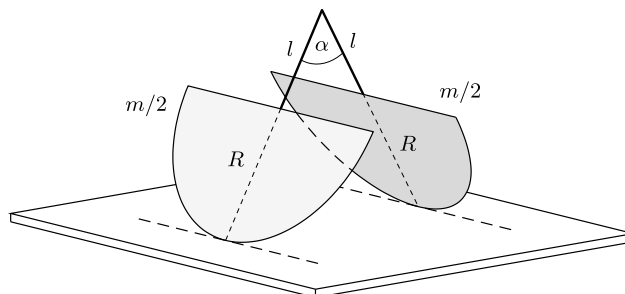
2. Tervezzünk minél egyszerűbben végrehajtható, és minél pontosabb eredményt szolgáltatató mérési eljárást (és hajtuk is végre) lábbal vagy elektromotorral hajtott kerékpárunk teljesítményének mérésére! Vegyük figyelembe a légellenállás és a gördülési/súrlódási ellenállás, valamint a gravitáció hatását! Használjunk minél egyszerűbb, a háztartásban általában megtalálható eszközöket! Mivel a teljesítmény függ(het) a sebességtől, a pedálfordulatszámától, motor esetén más paramétereiktől is, általánosság helyett kísérjünk meg egy konkrét szituációban minél jobban reprodukálható és pontos eredményt kapni! Elektromotor esetén próbáljuk meg a maximális leadott teljesítményt kimérni!

(Veres Gábor)

3. Egy α hajlásszögű lejtőre adott H magasságból pontszerű testet ejtünk a Holdon. A tökéletesen rugalmasan ütköző test pattogni kezd a lejtőn, pályája paraboláiból áll. Milyen magasan lesz az n -edik felpattanás utáni parabola vezéregyenesese, és milyen görbére illeszkednek a parabolák fókuszpontjai?

(Gnädig Péter)

4. Egy kör alakú, m tömegű, R sugarú vékony korongot az átmérője mentén kettévágunk. Mindkettőre egy-egy elhanyagolható tömegű, l hosszúságú rudat rögzítünk a félkorongok síkjában, a szimmetriatengelyük vonalában. Ezután a két rud másik végét egymáshoz rögzítjük úgy, hogy a köztük lévő szög nagysága α , és a két félkorong vágási élei párhuzamosan állnak (lásd a mellékelt ábrát). Ez a szerkezet az asztalra helyezve a korongok íven rezgőmozgást végezhet. Mennyi a rezgés frekvenciája kis kitérések esetén?



(Tichy Géza és Cserti József)

5. J. I. *Perelman* (1882–1942) orosz csillagász a „Végtelen csillagvilág” című 1929-es ismeretterjesztő könyvében a Hold librációját (vagyis azt a tulajdonságát, hogy kötött keringése ellenére mégsem pontosan ugyanazt az oldalát fordítja mindig a Föld felé) az alábbi gondolatmenettel magyarázza. Tekintsünk egy e numerikus excentricitású, a félnagy-tengelyű ellipszispályán egy M tömegű bolygó körül keringő elhanyagolható tömegű holdat, mely egyenletesen forog tengelye körül, mégpedig úgy, hogy forgásának T_{rot} periódusideje pontosan megegyezik keringésének T_{rev} periódusidejével! Mivel a keringés egy ellipszispályán történik, és (Kepler II. törvénye értelmében) időben nem is egyenletesen, ezért könnyen belátható, hogy a bolygó felszínéről vizsgálódó csillagászok némileg változó szögből látnak rá a hold felszínére a keringés során. Ám Perelman ekkor a következő érdekes állítást is hozzáteszi: „[a gondolat-kísérletben szereplő hold] állandóan ugyanazt az arcát mutatja, de nem a bolygó, hanem a pálya másik fókusza felé”. Igaz-e ez az állítás? Határozzuk meg a libráció mértékét a pálya másik gyújtópontjából, illetve azt is, hogy ha nem innen, akkor az ellipszispályán belül honnan nézve minimális a hold librációja!

(Vincze Miklós)

6. Egy naptárra ránézve feltűnhet, hogy a Nap nem a nyári napforduló idején kel legkorábban, és nem a téli napforduló idején kel legkésőbb, hanem ehhez képest néhány napos eltérést figyelhetünk meg. (Magyarországon az eltérés elég kicsi). Magyarazzuk meg a jelenséget! A Föld mely részén lesz a legnagyobb ez a különbség és miért? Lehetnek-e olyanok egy bolygó paraméterei, hogy csak az egyik fajta eltérés lépjen fel, vagyis pl. ne a téli napfordulóra essen a legkésőbbi kelés, de a nyári napforduló idején legyen a legkorábbi?

(Dálya Gergely)

7. Egy Föld-típusú exobolygó a központi csillaga körüli körpályán keringve párolog, így egy üstökösszerű porcsóvát húz maga után. Modellezzük ezt a csóvát úgy, hogy apró, gömb alakú szemcsékből áll!
- Milyen görbét kapunk, ha ábrázoljuk a rendszer összfényességét az idő függvényében (egy keringési idő alatt)?
 - Milyen pályán fognak mozogni a porszemcsék? Határozzuk meg a pálya paramétereit!
 - Határozzuk meg egy porszemcsének a bolygóhoz viszonyított szögsebességét!
 - Hogyan függ a csóva fényelnyelése a bolygótól való szögtávolságtól?

(Dálya Gergely)

8. Egy m tömegű részecske mozog egydimenziós potenciáltérben az $F = -kx + a/x^3$ erő hatása alatt (k és a pozitív paraméterek). Keressük meg az egyensúlyi helyzeteket, és vizsgáljuk meg stabilitásukat! Számítsuk ki az egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések frekvenciáját! Mutassuk meg, hogy ez a frekvencia nem függ a részecske energiájától! Mi lehet ennek a furcsa viselkedésnek az oka?

(Magyar Péter)

9. Alice és Bob megpróbálják kétféleképp kiszámolni az egyenesen terhelte híd kábelének alakját (nulla tömegű kábel, az egyensúlyban függőleges terhelés, vízszintes irányban homogén erőssűrűséggel). Alice felírja a lokális egyensúly feltételét, míg Bob variációs számítással áll neki, a teljes hosszat rögzíti, s emellett az elemi terhelő tömegek potenciális energiáit összegezve arra jut, hogy a kábel alatti területet kell minimalizálni (izoperimetrikus probléma). Meglepődve tapasztalják, hogy a két eredmény különbözik, Alice függvényalakja parabola, Bobé viszont körív! Állítsuk elő e megoldásokat! Melyik eredmény milyen fizikai elrendezésnek felel meg? Segítsünk Bobnak, hogy a variációs módszerével megkaphassa Alice eredményét, azaz adjunk olyan potenciális energia funkcionált, melynek minimumaként a parabola előáll!

(Györgyi Géza és Katz Sándor)

10. Kétdimenziós homogén áramlásba helyezünk egy szárnyprofil formájú akadályt. Ez utóbbit az $x = 1, y = 0$ ponton keresztülhaladó egység sugarú kör $z + 1/z$ Kutta-Zsukovszkij-transzformáltjaként állítjuk elő. A kör középpontja és az áramlás iránya szabad paraméterek. Határozzuk meg a torlópontok (ahol az áramlás sebessége nullává válik) helyzetét e paraméterek függvényében, feltéve, hogy az áramlás sebessége sehol sem válik végtelenné (Csapligin-feltétel), és nem következik be átésés!

(Bene Gyula)

11. Gyűrűk között kifeszülő minimális forgásfelületet keresve több stacionárius alakot kaphatunk. Mi e megoldások fizikai jelentése? Tekintsünk azonos, egységnyi sugarú, egymástól d távolságra levő koaxiális gyűrűket! Hasonlítsuk össze a stacionárius felületek felszínét, beleértve a két gyűrűre feszülő körlapokét is, majd analizáljuk az egyes megoldások lokális stabilitását! Numerikusan is vizsgálhatjuk a sajátértékproblémát, vagy analitikus megoldást adhatunk akkor, amikor egyetlen sima stacionárius felület van, majd az attól való kis eltérésekre első rendben perturbatíván számolhatunk. Ábrázoljuk vázlatosan néhány jellegzetes d távolság mellett a felszín nagyságát („tájképet”) a függvényterben oly módon, hogy a stacionárius pontok láthatók legyenek!

(Györgyi Géza és Katz Sándor)

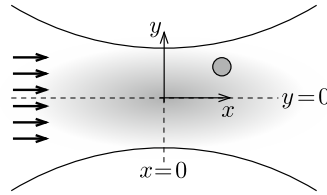
12. Egy 2 cm átmérőjű, 4 cm hosszú henger alakú dugót nézünk egy 5 dioptriás, 3 cm átmérőjű lencsével. A henger tengelye és az optikai tengely egybeesik. A lencse 30 cm-re van a szemünktől, és a dugó alapköre a lencse mögött van 2 cm-re. Rajzoljuk le a papírra, amit látunk, olyan nagyításban, hogy a lencse átmérője a papíron 6 cm legyen!

(Tichy Géza)

13. Az optikai szakirodalomban ismert egy alapelv, mely szerint nem létezik olyan tökéletes leképezést létrehozó optikai rendszer, ami nagyít vagy kicsinyít. Az elv indoklása a hullámoptikán alapul: a geometriai optika „leképezés”-fogalma mögött igazából a különböző úton terjedő hullámok erősítő interferenciája áll. Am ha a tárgy két pontjának távolsága $n\lambda$, akkor a leképezett pontoké N nagyítási (vagy kicsinyítési) tényező esetén $Nn\lambda$ lesz – ezért általában drasztikusan megváltoznak az interferenciaviszonyok. Ennek ellenére – mint ugyancsak közismert – egy a sugarú üveggömb egy, a belsejében levő, $r < a$ sugarú teljes gömbfelületet tökéletesen leképez egy $R > a$ sugarú, az üveggömbön kívül elhelyezkedő gömbfelületre. Ellentmondásban van-e ez a tény a fenti elvvel?

(Tichy Géza)

14. A lézercsipesz egy olyan laboratóriumi berendezés, amelyben a tér egy kis tartományában fókuszált lézernyalábbal lehet mikroszkopikus méretű testeket csapdázni („megfogni”), mozgatni. A működés alapelve az, hogy a fókuszoltban kialakuló, inhomogén intenzitású tartományba helyezett testre olyan erő hat, amely a kis intenzitású hely felől a nagy intenzitású hely felé mutat. Ebben a feladatban a csapdázni kívánt test egy, a lézernyalább hullámhosszánaál sokkal kisebb méretű, latexből készült, töltetlen, szigetelő nanogolyócska. A golyó tömör és homogén, tömege m , sugara R , relatív dielektromos állandója pedig ϵ_r .



A nanogolyócskát egy erősen fókuszált, polarizált lézernyalábbba helyezük (lásd az ábrát). A lézernyalább minden pontjában x irányba haladó, helyről helyre változó amplitúdójú, ω körfrekvenciájú síkhullámmal közelíthető. A lézernyalább intenzitása a hely függvényében az

$$I(x, y, z) = I_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} \right)$$

formulával közelíthető az $|x| \ll a$; $|y| \ll b$; $|z| \ll b$ tartományban ($a, b > 0$).

a) Határozzuk meg a golyócska egyensúlyi helyzetének koordinátáit, azaz azt a helyet, ahol az intenzitás inhomogenitásából származó csapdázó erő és a sugárzási nyomás által kifejtett erő egyensúlyt tart! (Feltehetjük, hogy az egyensúlyi helyzet origótól mért távolsága sokkal kisebb az a, b paramétereknél, de sokkal nagyobb a golyócska R sugaránál. Alkalmazzuk a maxwelli elektrodinamika törvényeit!)

b) Hogyan mozog a nanogolyócska, ha egyensúlyi helyzetéből y irányban kicsiny $d \ll b$ távolsággal kimozdítjuk? Adjuk meg a mozgást jellemző paraméter(ek)et!

(Vigh Máté)

15. Négyzetrácsban elhelyezkedő azonos R ellenállásokból N szélességű (a rácspontok száma az egyik irányban $N+1$, az ellenállások száma N) végtelen szalagot készítettünk. Mennyi az ellenállás a hálózat két tetszőleges rácspontja között? Számítsuk ki egzaktul az ellenállást az $N = 5$ szélességű szalagban a szalag középvonalához képest szimmetrikusan elhelyezkedő két szomszédos rácspont (azaz egy ellenállás két végpontja) között!

(Cserti József)

16. Két párhuzamos, földelt fémlemez között, a lemezekkel párhuzamosan egy elektromosan töltött, jó hosszú fémszál található. Mekkora erő hat a Q töltésű, L hosszú szála, ha a lemezek távolsága D , és a szál az egyik lemeztől d távolságban helyezkedik el? ($D \ll L$).

(Gnädig Péter)

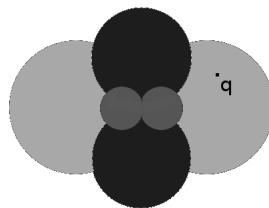
17. Egy szigetelő anyagból készült, grafittal egyenletesen bevont asztali földgömbbe egy vékony vezetéken Brüsszelnél valamekkora áramot vezetünk be, Budapestnél pedig ugyanekkora áramot vezetünk ki a gömbből.

a) Milyen alakú görbék mentén folyik az áram a grafitrétegben?

b) Mekkora a feszültség Kijev és Moszkva között, ha Phenjan és Szöul között a feszültség U_0 ?

(Gnädig Péter)

18. A mellékelt sematikus ábrán egy úrhajó fúziós reaktorának keresztmetszete látható. A képen látható valamennyi kör középen egy közös pontban érinti egymást. (Az ábrán háromféle különböző méretű kör szerepel.) A háromdimenziós szerkezet egy forgástest, melyet az ábra függőleges szimmetriatengelye körüli forgatással kaphatunk meg. A reaktort alkotó gömbök és törusok falai ideális fémből készültek; a világosszürke tartomány üreges. Határozzuk meg egy, ebben az üregben tetszőlegesen elhelyezkedő, nyugvó ponttöltés által keltett potenciált, ha nincs külső tér (a reaktor még nem működik...) és a falak földeltek!



(Lájer Márton)

19. Egy homogén izotróp vezető anyagból készült téglatest ellenállása $\rho c/(ab)$, ahol ρ a fajlagos ellenállás, ami a σ vezetőképesség inverze, a , b , c a téglatest oldalai, és az áram a c hosszúságú oldallal párhuzamosan folyik. Anizotróp esetben ρ és σ is tenzor. Tegyük fel, hogy a téglatest tengelyei nem esnek egybe a mátrixok főtengeleivel! Mekkora lesz a téglatest ellenállása? Milyen speciális geometriájú esetekben lehet egzaktul, illetve jó közelítéssel kiszámítani az ellenállást? A tenzorkomponensek milyen kombinációi jelennek meg az ellenállás képletében? (A téglatest két végén az áram be-, illetve kivezetése az egész homloklapot lefedő, ideálisan vezető fémkontaktuson át történik.)

(Tichy Géza)

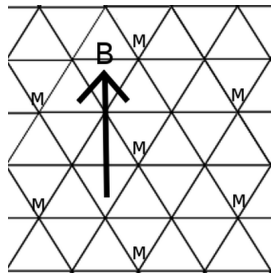
20. Egy a szélességű és b vastagságú egyenes rézpálcát két végénél a vízszintesen és mereven rögzítünk, szabad részének hossza így l ($l \gg a \gg b$). A pálcát alá, középvonala valamely pontjának közelébe egy kicsiny, \mathbf{m} mágneses momentumú permanens mágneset helyezünk úgy, hogy \mathbf{m} merőleges legyen a pálcát alsó, legnagyobb lapjára, és a mágnes középpontja attól $d \ll l$ távolságra legyen. A pálcát a szélessége irányában a mágneses tér változása elhanyagolható. A mágnes hatására a pálcát kissé meghajlik. Hogyan módosul a pálcát alakja a vízszinteshez képest? Adjuk meg a pálcát új, egyensúlyi alakjának egyenletét a mágnes vízszintes helyzetének függvényében! A gravitációt elhanyagolhatjuk, és természetesen használhatók még anyagi paraméterek is. A pálcát kitérése d -nél sokkal kisebb.

(Kovács Áron)

21. Erős neodímium mágneset ejtünk függőleges tengelyű acélcsőbe. Milyen sebességgel esik át rajta? Stabil-e az egyenes vonalú egyenletes mozgás az esés során?

(Bene Gyula)

22. Az ábrán látható egységnyi oldalhosszúságú, szabályos háromszögrács rácspontjaiba m és M mágneses momentumú, θ és Θ tehetetlenségi nyomatékú iránytűket teszünk (az M momentumok helyét az ábrán külön jelöltük). Az iránytűk a rács síkjában szabadon elfordulhatnak, és dipólusoknak tekinthetők, melyek csak legközelebbi szomszédai hatását érzik. A rács egy, a síkjával párhuzamos homogén B_0 mágneses térben van, melynek irányát az ábra szemlélteti. Alapállapotban minden mágnes a külső tér irányába áll be. Az iránytűk egyensúlyi helyzet körüli kis rezgései hullámként terjednek a rácsban. Határozzuk meg $f(\omega, \mathbf{k}) = 0$ alakban a diszperziós relációt!



(Márton Lájér)

23. Egy henger alakú, teljesen hőszigetelő dobozt két egyenlő V térfogatú része oszt egy m tömegű, hőt át nem eresztő, súrlódó dugattyú, ami az alaplappal párhuzamosan mozoghat, és kezdetben rögzítve van. Az egyik térrészben p nyomású és T hőmérsékletű egyatomos ideális gáz van. A másik térrészben $2p$ nyomású és $2T$ hőmérsékletű ugyanilyen gáz. A dugattyú rögzítését kiengedve állandó S csúszási súrlódási erő mellett mozoghat. A tapadási súrlódás maximális értéke is S . Hogyan mozog a dugattyú? Mennyi utat tesz meg a megállásig? Diskutáljuk a leírás érvényességét kicsiny m tömeg esetén!

(Horváth Ákos)

24. Két relativisztikus részecske közeledik egymáshoz, kezdeti \mathbf{V} és \mathbf{v} sebességvektorai egymásra merőlegesek. A rendszer invariáns tömege a kisebbik test nyugalmi tömegének tízszerese. A nagyobb tömegű részecske kibocsát egy közvetítő részecskét, amely elviszi energiájának és impulzusának egy részét. Az emisszió után a részecske nyugalmi tömege hetedére csökken, új sebességvektora viszont megegyezik a másik részecske kezdeti \mathbf{v} sebességvektorával. A másik részecske elnyeli a kibocsátott közvetítő részecskét, nyugalmi tömege ezzel az eredeti érték hétszeresére nő, új sebességvektora viszont az első részecske kezdeti \mathbf{V} sebességvektorával egyezik meg. Mekkora a közvetítő részecske nyugalmi tömege?

(Dávid Gyula)

25. Vizsgáljuk a függőleges hajítás feladatát egy gömbszimmetrikus test körüli Schwarzschild-térben! Vezessük le a Schwarzschild-féle r és t változók közötti összefüggést kifejező $r(t)$ függvényre vonatkozó, az általános relativitáselméletnek megfelelő, semmiféle közelítést nem tartalmazó differenciálegyenletet, és hasonlítsuk össze a megfelelő newtoni formulával! Speciális esetekben kísérleljük meg az egyenlet megoldását is!

(Dávid Gyula)

26. Egy fekete lyuk felé radiális irányban két űrhajó zuhan egymás nyomában. Végtelenbeli kezdősebességük nullának vehető. Az eseményhorizont átlépésekor a két űrhajó Schwarzschild-féle radiális r koordinátájának különbsége jóval kisebb, mint az eseményhorizont b gravitációs sugara. Írjuk fel az egyik test mozgását a másik testhez rögzített lokális inerciarendszerben, és fordítva is! Mit tapasztalnak a űrhajókon utazó megfigyelők akkor, amikor a másik test, illetve a saját űrhajójuk átlépi az eseményhorizontot?

(Dávid Gyula)

27. Egyenletes anyageloszlású, sík térmetrikájú Friedmann–Robertson–Walker-univerzumban egy gömb alakú üreg van, melynek közepében található a gömbből hiányzó anyag. Ez az elrendezés az Einstein-egyenletek egzakt megoldásához vezet (svájci sajtó modell). Mutassuk meg, hogy ha a gömb sugara elegendően nagy, akkor
- a gömb sugara kisebb a Schwarzschild-sugárnál,
 - kívülről a gömbbe belépve onnan ismét vissza lehet jönni,
 - a gömb középpontjába nem lehetséges eljutni.

(Bene Gyula)

28. Vizsgáljuk meg egy m tömegű kvantum részecske viselkedését a $V(x) = kx^2/2 + a/(2x^2)$ egydimenziós potenciálban (k és a pozitív paraméterek)! Gondoljuk meg, hogy a kvantummechanika számos megfogalmazása, reprezentációja, számolási módszere közül melyik a legalkalmasabb a probléma kezelésére!
- Határozzuk meg az alapállapot és a gerjesztett állapotok sajátenergiáit, sajátfüggvényeit, és vizsgáljuk meg az állapotok degenerációját! Hogy viszonyul a kapott megoldás a kiinduló potenciál két tagjára külön-külön kapottakhoz?
 - Tudunk-e megnevezni olyan létező fizikai rendszert, amely elfogadhatóan leírható ilyen potenciállal?
 - Általánosítsuk a feladatot n dimenzióra, és diszkutáljuk az $n = 1, 2, 3$ eseteket!

(Magyar Péter)

29. Legyen \hat{a}^\dagger és \hat{a} egy kvantum harmonikus oszcillátor keltő és eltüntető operátora a szokásos $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I}$ felcserélési relációval! Jelöljük az $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ kvantumszám-operátor sajátvektorait $|n\rangle$ -nel! Hajtsunk most végre az operátorokon egy formális „Lorentz-transzformációt”: legyen $\hat{b} = \hat{a} \cosh \chi - \hat{a}^\dagger \sinh \chi$, ahol χ egy rögzített valós paraméter! Mutassuk meg, hogy az így értelmezett \hat{b} operátor és adjungáltja is a szokásos felcserélési relációt kielégítő eltüntető és keltő operátornak tekinthető! Állítsuk elő az $\hat{M} = \hat{b}^\dagger \hat{b}$ operátor alapállapotát, valamint első és második gerjesztett állapotát az \hat{N} operátor $|n\rangle$ sajátvektorainak lineáris kombinációjaként! Ügyesebb feladatmegoldók az \hat{M} operátor tetszőleges $|m\rangle$ sajátvektorának, valamint a koherens állapotok vektorainak az előállítását is megkereshetik. Ügyeljünk az állapotvektorok normálására!

(Dávid Gyula)

30. Egy több részecskéből álló fermionikus rendszer állapotát a betöltésszám-reprezentációban az $|n_1, \dots, n_i, \dots, n_N\rangle$ állapotvektor írja le, ahol $n_i \in \{0, 1\}$ az i -edik egyrészecske-kvantumállapot betöltési száma, N a lehetséges egyrészecske állapotok száma. Az ezen állapotokon ható tetszőleges operátor előáll a fermionikus keltő (a_i^\dagger) és eltüntető (a_i) operátorok polinomjaiként. Egy általános egyrészecske-operátor a Fock-téren $O_1 = \sum_{ij} O_{ij} a_i^\dagger a_j$ alakban adható meg. Egy $M \times M$ -es A mátrix fraktáldimenzióját következő módon definiálhatjuk:

$$d(A) = \frac{\ln(s(A))}{\ln(M)},$$

ahol $s(A)$ a mátrix nem nulla elemeinek a száma. (Megjegyzés: egy általános sokrészecske-operátor fraktáldimenziója értelemszerűen 2, hiszen az egy teli mátrix.) Számítsuk ki betöltésszám-reprezentációban a lehető legsűrűbb egyrészecske-operátorok fraktáldimenzióját az ($N \rightarrow \infty$) termodinamikai limeszben a teljes Fock-téren és a Fock-tér n -részecske alterén ($n < N$)! Mit mondhatunk a több részecske-operátorok fraktáldimenziójáról?

(Oroszlány László és Barankai Norbert)

31. Írjuk fel az $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ Lagrange-sűrűségű relativisztikus *klasszikus* térelmélet megoldását adott $\phi_0(x)$ kezdőfeltétel mellett! A kapott megoldás segítségével oldjuk meg az $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{3} \lambda_1 \phi^3 + \frac{1}{4} \lambda_2 \phi^4$ Lagrange-sűrűségű modellt is a λ_1, λ_2 csatolási állandókban másodrendig, diagrammatikus perturbációs számításal (általunk előírt szabályok szerint megrajzolt és értékkel felruházott ábrák segítségével, perturbatív módon)! A szabályokat adjuk meg mind koordináta-, mind impulzustérben (Fourier-tér)! Hogyan változnának a szabályok, ha a *klasszikus* szót a *kvantum* szóval helyettesítenénk? Hogyan kaphatjuk vissza a kvantum szabályokból a klasszikusakat?

(Laczkó Zoltán)

32. Szokás mondani, hogy a kvantummechanikába a részecskék megkülönböztethetlenségét és a Pauli-elvet „kívülről” kell beépíteni. Egy két részecskéből álló rendszer esetében, koordináta-reprezentációban megköveteljük, hogy az S permutáció-operátornak, mely a kétváltozós $\psi(x_1, x_2)$ állapotfüggvények terében hat és az

$$(S\psi)(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$$

transzformációt hajtja végre, a rendszer minden állapota sajátállapota legyen. (Az x_1 és x_2 általános koordináták, diszkrét elemeket is tartalmazhatnak.) Az S permutáció-operátor különböző sajátértékekhez tartozó sajátállapotainak lineárkombinációit a Pauli-elv – mint fizikailag megvalósuló rendszereket – kizárja.

Elgondolkozhatunk azonban azon, hogy lehetséges-e a klasszikus mechanikai rendszerek kvantálását úgy módosítanunk, hogy az már eleve tartalmazza a részecskék megkülönböztethetlenségét. Egy lehetséges út a következő. Legyen N egy klasszikus mechanikai pontrendszer részecskéinek száma, és tegyük fel, hogy a rendszer konfigurációs tere Q^N , ahol Q az egyrészecskés konfigurációs tér! Könnyen elfogadható érvelés az, hogy ha a tömegpontok tömege, töltése, stb. azonos, akkor ezek a részecskék a legtöbb esetben már klasszikusan sem megkülönböztethetőek. Ebből fakadóan a rendszer leírásához használt fázistér valójában nem Q^N , hanem az tér, melyet úgy kapunk, hogy Q^N -ben azonosítjuk azokat a pontokat, melyek a koordináták permutálásával egymásba átvihetők. Röviden: a konfigurációs térünk Q^N/S_N , ahol az S_N szimmetrikus csoport az N hosszúságú, különböző elemeket tartalmazó sorozatok permutációcsoportja. Eljárásunk most már így folytatódik: ahelyett, hogy a kvantáláshoz a Q^N konfigurációs teret használnánk, használjuk a Q^N/S_N teret!

Térjünk át most arra a speciális esetre, amikor $Q = \mathbb{R}^d$, azaz $Q^N \equiv \mathbb{R}^{dN}$. Először is mutassuk meg, hogy S_N fixpontjai egy d -dimenziós alteret alkotnak Q^N -ben! Mi a fixpontok X_{CM} terének fizikai jelentése? Az X_{CM} teret leválasztva kapjuk, hogy $Q^N \simeq (\mathbb{R}^{(N-1)d}/S_N) \times X_{CM}$. Legyen $N = 2$, ekkor $S_2 \simeq \mathbb{Z}_2$. Hogyan hat \mathbb{Z}_2 a $\mathbb{R}^{(N-1)d}$ téren? Milyen topológikus teret kapunk, ha kikötjük, hogy részecskéink nem ütközhetnek, illetve, ha ütközhetnek? Milyen érdekes topológiai tulajdonságaik vannak ezeknek a tereknek?

Vizsgáljuk részletesebben a legegyszerűbb esetet, amikor $N = 2$ és $d = 1$! Mutassuk meg, hogy a konfigurációs tér izomorf a félsíkkal! Koordináta-reprezentációban a vizsgált rendszert így már a félsíkon értelmezett, négyzetesen integrálható, komplex értékű függvények fogják jellemezni. Ugyanakkor nem engedhetünk meg minden ilyen függvényt, ugyanis a fizikai interpretálhatóság megköveteli, hogy a félsík élén *határfeltételt* írjunk elő. Hogyan válasszuk meg ezt? Bevezetve a félsík élével párhuzamos (x) és arra merőleges koordinátákat (z), mutassuk meg, hogy tetszőleges $\psi(x, z)$ hullámfüggvény, mely fizikai rendszert ír le, a határon kielégíti a

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi(x, 0) = \eta \psi(x, 0)$$

egyenletet valamely valós η paraméter esetén! Mutassuk meg, hogy a szabad mozgáshoz tartozó Hamilton-operátor most is

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

alakba hozható! Tegyük fel, hogy egy $\psi(x, z)$ függvény egy rögzített η mellett kielégíti a fenti határfeltételt! Milyen lehet a $\psi(x, z)$ függvény, ha emellett kielégíti a szabad mozgás Schrödinger-egyenletét is? Diszkutáljuk a választ η értékétől függően! Legvégül próbáljuk megtalálni azokat a szabad hullámfüggvényeket, amik bozonikus és fermionikus megoldásoknak feleltethetők meg!

(Barankai Norbert)

33. Egy befektetési bank árképzőként eladási és vételi árakat publikál egy befektetési eszközre. A bank (helyes) számítása szerint az eszköz valós értéke 100. A piaci szereplők ugyanezt az eszközt, egyenletes eloszlással, (hibásan) 90 és 110 között értékelik. Minden piaci szereplő, aki az eladási ár fölött értékeli az eszközt, vesz egyet a banktól az ajánlott áron, és ekkor a bank profitként realizálja az eladási ár és a valós érték (100) különbségét. Minden piaci szereplő, aki a vételi ár alatt értékeli az eszközt, elad egyet a banknak az ajánlott áron, és ekkor a bank profitként realizálja a valós érték (100) és a vételi ár különbségét.

a) Milyen eladási és vételi árakat publikáljon a bank, hogy maximális profitot realizálhasson?

Tegyük most fel, hogy két különböző bank is fellép árképzőként, mindkettő tud a konkurenciáról, és mindkettő helyesen 100-ra értékeli az eszközt. A piaci szereplők értékelése ugyanaz, mint az előbbi példában. Az a piaci szereplő, amelyiknek az értékelése csak az egyik bank eladási ára fölött van, vesz egyet ettől a banktól az ajánlott áron, és ekkor a bank profitként realizálja az eladási ár és a valós érték különbségét. Ha a piaci szereplő értékelése mindkét bank eladási ára fölött van, akkor az általa vélt ár-érték-különbségek arányában vesz a bankoktól, összesen most is egységnyit. A bankok profitja ekkor a saját eladási ár és a valós érték különbségének és a forgalmi aránynak a szorzata. A piaci szereplők viselkedése és a bankok profitja az eladási oldalon a vételi oldal analóg tükörképe.

b) Milyen eladási és vételi árakat publikáljanak a bankok, feltéve hogy mindkettő a saját profitját próbálja maximalizálni?

(Bihary Zsolt)

34. A képen (<http://ortvay.elte.hu/2014/abrak/sandstorm.ps>) egy, a Földközi tenger térségében dúló homokvihar látható. Becsüljük meg a műholdképből a szálló homokszemcsék méretét!

(Rácz Zoltán)

35. Határozzuk meg a Naprendszer keringési sebességét a Tejút középpontja körül a Sloan Digitális Égtérkép (Sloan Digital Sky Survey, SDSS) publikus adatbázisát használva! Az adatbázisból gyűjtsük le alkalmasan kiválasztott csillagok égi koordinátáit, valamint a spektrumokból lemerített vöröseltolódásait! Csillagok esetében a vöröseltolódást a Doppler-eltolódás okozza, így az közvetlen kapcsolatban van a látóirányú relatív sebességgel. Az adatbázisban szereplő vöröseltolódások már korrigálva vannak a Föld Nap körüli keringésére. A csillagok egyenként véletlenszerű inklinációval rendelkező pályán keringenek a Tejút középpontja körül, ezért pár négyzetfokkonként kiátlagolt látóirányú sebességekből készítsünk térképet! Ábrázoljuk ezt a térképet, majd azzal a feltételezéssel élve, hogy az így kiátlagolt „állócsillag-rendszerhez” képest mozog Napunk egy adott irányba egy adott sebességgel, határozzuk meg a sebesség nagyságát és irányát galaktikus koordinátákban! Az adatfeldolgozás során használjunk galaktikus (l, b) koordinátákat! Ügyeljünk arra, hogy a csillagászati adatbázisok nem tökéletesek! A készítőik minden igyekezetük ellenére előfordulnak hibás mérések, melyeket az adatfeldolgozás során kell kiszűrni. A beküldött megoldás tartalmazza az adatfeldolgozás részletes leírását, a lefuttatott SQL lekérdezéseket és az adatfeldolgozásra használt program forráskódját is!

Rövid segítség az adatbázis eléréséhez:

Az adatbázis a <http://skyserver.sdss3.org/> weboldalon keresztül érhető el. Itt kattintsunk a CasJobs linkre, ahol egyszerű regisztrációt követően teljes körű hozzáférést kapunk az adatokhoz. Az adatok lekérdezéséhez az SQL nyelvet kell használni. A lekérdezések a CasJobs weboldal Query menüjében futtathatók. Futtatás előtt győződjünk meg arról, hogy az adatbázis megfelelő verzióját (DR7) használjuk; a verziót a Context mezőben lehet kiválasztani. Az adatbázisban található adattáblák részletes leírását a főoldalon, a Schema Browser menüben találjuk.

Az alábbi egyszerű lekérdezés néhány csillag Doppler-eltolódását adja meg:

```
SELECT TOP 100 p.l, p.b, s.z
FROM SpecObj s
INNER JOIN Star p
ON p.objID = s.bestObjID
WHERE s.SpecClass = 1
```

Futtatás (Submit gomb) után a lekérdezés eredménye a MyDB menüben jelenik meg, ahonnan az adatok további feldolgozás céljára CSV formátumban letölthetők. Az adatanalízis tetszőleges programnyelven megírt feldolgozóprogrammal elvégezhető, de hisztogramok készítésére, átlagolásra az SQL nyelv közvetlenül is alkalmas.

Az alábbi lekérdezés meghatározza az SDSS által megfigyelt csillagok számát a galaktikus szélesség függvényében, egy fokos felbontással:

```
SELECT FLOOR(p.b), COUNT(*)
FROM SpecObj s
INNER JOIN Star p
ON p.objID = s.bestObjID
WHERE s.SpecClass = 1
GROUP BY FLOOR(p.b)
ORDER BY 1
```

Amennyiben a COUNT(*) függvényt AVG(s.z)-re cseréljük, úgy a csillagok száma helyett az átlagos Doppler-eltolódást kapjunk eredményként.

Érdeemes tanulmányozni a SkyServer portál „Education”, „Schema”, „SQL Tutorial” és „Sample SQL Queries” lapjait!

(Csabai István és Dobos László)

\end{document}