

A 44. ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 2013. október 25 – november 4.

1. Kérjünk hozzáférést egy családtag vagy ismerős tulajdonában levő mikrohullámú sütőhöz, ha nincs sajátunk. (Az öt évnél újabb Panasonic sütőket zárjuk ki a kísérletből!) Melegítsünk fél deci tejet kávésbögrénkben a maximális fokozaton, ne fusson ki, de kellően meleg legyen! Annak alapján, hogy hány másodpercig kellett ehhez működtetnünk a sütőt, valamint a maximális névleges mikrohullámú teljesítmény ismeretében megtudhatjuk, hogy mennyi névleges ténergiát használtunk fel.

A feladat az, hogy hasonló hőmérsékletre melegítsük szobahőmérsékletről a tejet a fent meghatározott energia leadásával, de most a maximális teljesítménynek csak kb. harmadát állítsuk be a sütőn. Próbáljuk meg kideríteni kísérletekkel, hogy mennyi ideig kell melegíteni a tejet! Adható-e egyáltalán ismételhető recept?

Egyszerűbb hipotézisek vizsgálatát követően vegyük figyelembe, hogy lényeges lehet a tér teljesítménysűrűségének térbeli eloszlása, a bögre helye a tányéron, s végül a forgótányér szögsebessége is!

A válasz készülékfüggő lehet. Ismertesse a kísérleteit, és vonja le a saját sütőjére érvényes következtetéseit! Pontszámot értelmes gondolatmenetre és mérési leírásra adunk.

Miért zártuk ki az újabb Panasonic sütőket?

Figyelmeztetés: a sütőt ne működtessük üresen! Miért?

(Györgyi Géza és Lendvai János)

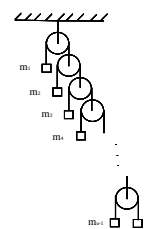
2. Felix Baumgartner 2012. október 14-én mintegy 39 kilométeres magasságban kiugrott egy héliumballon fülkájából és a világon elsőként a hangsebességnél is gyorsabban száguldott a Föld felé. Ezzel megdöntötte nagy elődje, Joseph Kittinger 1960-ban felállított rekordjait, aki „csak” 31 km magasból ugrott, és az 1000 km/h sebességet is csak megközelíteni tudta. Viszont a leghosszabb szabadesés idejének rekordját Baumgartnernek nem sikerült megdöntenie, mert az általa elért 4 perc 19 másodperces zuhanási idő 17 másodperccel elmarad a régi rekordtól. Lehetséges, hogy nagyobb magasságból indulva a ritkább levegőben elért nagyobb sebesség miatt hamarabb ér földet az ugró (azonos tömegű és közegellenállású ugrókat feltételezve)? Vagy ez nem lehetséges, és az időbeli eltérést a körülmények különbözősége okozta? (A számítás során tételezzük fel, hogy a közegellenállás a zuhanás sebességének négyzetével arányos, a levegő sűrűsége pedig a barometrikus magasságformula szerint változik!)

(Ráczkevi Béla)

3. Rugalmas centrális ütközéskor az ütközés utáni sebességek az ütközés előttiéknél homogén lineáris függvényei, azaz a szórás egy mátrixszal reprezentálható. Számoljuk ki a mátrix sajátértékeit és sajátvektorait! Adjuk meg a sajátállapotok fizikai értelmezését!

(Tichy Géza)

4. Vizsgáljuk meg az ábrán látható, homogén gravitációs erőterbe helyezett egyszerű szerkezetet! Az $n - 1$ darab ideálisan csapágyazott, elhanyagolhatóan kis tömegű csigán súlytalan, nyújthatatlan, hajlékony fonalat vetünk át, az egyik oldalon egy m tömegű testet, a másik oldalon egy további csigát függesztünk a kötélágakra. A legalsó csiga mindkét oldalára egy-egy m tömegű testet függesztünk. Határozzuk meg az egyes tömegek gyorsulását és a hozzájuk tartozó csigán átvett kötelet feszítő erőt! Adjunk zárt alakban képletet a legfelső test gyorsulására n függvényében! Vizsgáljuk meg az $n \rightarrow \infty$ határesetet is!



(Homa Gábor és Pásztor Attila)

5. Egy bolygó ellipszispályán kering a napja körül, és a párologás miatt a tömege időben lassan csökken. Hogyan változnak az ellipszis paraméterei az idő függvényében?

(Széchenyi Gábor és Cserti József)

6. Hegyen-völgyön kerékpározva újra és újra felmerült bennem a kérdés, hogy miként kell beosztani a véges erőnket, ha leggyorsabban akarjuk megtenni a tervezett utunkat. Mivel tudjuk, hogy az ember bonyolult rendszer, ezért az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy elektromos kerékpárt, amelynek akkumulátora W munkát képes végezni, és szükség esetén kellően nagy nyomatékot képes kifejteni. Hogyan szabályozzuk a hajtóerőt, és ezáltal hogyan válasszuk meg a sebességet, hogy az adott, változó meredekségű, l hosszúságú, h szintkülönbségű, monoton emelkedő utat a lehető leggyorsabban tegyük meg (a rendelkezésre álló W energia bőven elegendő a legmagasabb pont eléréséhez). Tételezzük fel, hogy a kerékpárosra végig a sebességének négyzetével arányos közegellenállási erő hat $(-\beta v^2)$. Hogyan változna a válaszunk a sebességgel lineárisan arányos vagy tetszőleges pozitív hatványú közegellenállás esetén? Mi az optimális stratégia, ha lejtők is vannak, és vissza tudunk táplálni energiát az akkumulátorba, illetve ha nem?

(Cynolter Gábor)

7. Mint az elsős mechanika óráról ismeretes, egy centrális potenciálban mozgó tömegpont effektív egydimenziós mozgást végez a radiális koordinátában. Az effektív potenciál az energiából kapható, ha az impulzuszórási megmaradását kihasználjuk: az eredeti potenciálhoz hozzáadódik a centrifugális potenciál.

A mozgásegyenletet a Lagrange-függvényből is származtathatjuk. Ha azonban itt helyettesítjük be az impulzuszórási megmaradását, a centrifugális potenciál ellentétes előjellel adódik. Azaz, ha az Euler–Lagrange-egyenletet naívvul alkalmazzuk, akkor a centrifugális erő rossz előjellel jelenik meg a mozgásegyenletben. Oldjuk fel a látszólagos ellentmondást!

Általános esetben tegyük fel, hogy az egyik koordináta ciklikus, s ennek megmaradó impulzusát írjuk vissza a Lagrange-függvénybe! Hogyan kapjuk innen a korrektt mozgásegyenletet?

(Györgyi Géza)

8. Tanulmányozzuk a fény terjedését leíró geometriai optikai Fermat-elvet abban az esetben, amikor a közeg törésmutatója nem csak a helytől, hanem a fényterjedés irányától is függ: $n = n(\mathbf{r}, \mathbf{e})$, ahol \mathbf{r} a helyvektor, \mathbf{e} pedig a fénysugár terjedési irányába mutató egységvektor!

a) Írjuk fel a Fermat-elvhez mint variációs elvhez tartozó, a pálya alakját meghatározó Euler–Lagrange-egyenletet, független változónak a pálya ívhossz-paraméterét választva! (Tanács: ideiglenesen vezessünk be egy, a pálya mentén monoton változó w független változót, és csak később térjünk át az ívhossz-paraméterre!)

b) Vizsgáljuk meg azt a speciális esetet, amikor a törésmutató a következő alakú:

$n = n(\mathbf{r}, \mathbf{e}) = 1 + (e^{\beta(r)} - 1)(1 + \mathbf{e}\mathbf{k})$, ahol \mathbf{k} a z irányú egységvektor! Írjuk fel a pályát meghatározó egyenletet a lehető legegyszerűbb alakban!

c) Függyjön most a $\beta(\mathbf{r})$ függvény csak az \mathbf{r} vektor r abszolút értékétől! Mutassuk meg, hogy ebben az esetben a fénysugár pályája síkgörbe, és írjuk fel a görbét meghatározó egyenletet! Hogyan kell megválasztanunk a $\beta(\mathbf{r})$ függvényt, ha azt akarjuk, hogy a fénysugár ellipszis alakú pályán keringjen a centrum körül?

(Dávid Gyula)

9. Mozogjon egy tömegpont a $V_0(r)$ centrális potenciálban véges minimális és maximális rádiusz között, s egy oszcilláció alatt tegyük fel ismertnek a pálya $r_0(\phi)$ alakját, mely az E energiától és az N impulzuszórási megmaradástól függ! A centrumhoz legközelebbi pontból indulva egy teljes radiális oszcilláció alatt a tömegpont forduljon el Φ_0 polárszöggel (például Kepler-pályák esetén $\Phi_0 = 2\pi$, harmonikus potenciálban $\Phi_0 = \pi$, azonban általában Φ_0 a π -vel nem áll racionális viszonyban)!

Mutassuk meg, hogy a potenciál $\delta V(r)$ perturbációjának hatására az elfordulás szögének vezető korrekciója

$$\delta\Phi = -\frac{\partial}{\partial E} \int_0^{\Phi_0} \delta V(r_0(\varphi)) d\varphi,$$

ahol a potenciál a perturbálatlan $r_0(\varphi)$ pálya mentén veendő! A parciális deriváltat állandó N mellett értjük.

A $V_0(r) = -m\alpha/r$ gravitációs potenciálhoz $\delta V(r) = \gamma/r^n$ perturbációt adunk. Határozzuk meg expliciten általános pozitív egész n -re a perihélium-elfordulás $\delta\Phi$ szögét! Milyen n mellett nem függ az elfordulás az excentricitástól?

(Györgyi Géza)

10. Egy α hajlásszögű lejtőn egy γ kúpszögű, homogén tömegeloszlású és h magasságú kúp az egyensúlyi helyzete körül gördülve kis kitérésű rezegéseket végez. Határozzuk meg a rezgés frekvenciáját!

(Tichy Géza és Cserti József)

11. Egy rugalmas, homogén, téglalap keresztmetszetű acéllemezt (vastagsága d , szélessége w , az acél sűrűsége ρ , rugalmassági modulusa E) egyik végén a falba ágyazunk, a falból kiálló rész hossza L . (Az egyszerűség kedvéért a történet súlytalanságban játszódik.) A lemezt megütjük úgy, hogy a vastagsága irányában rezegni kezd.

a) Milyen frekvenciákon kezd el rezegni a lemez? Valós adatokból kiindulva tervezzünk olyan lemezt, amelyet hangvillának lehet használni, azaz 440 Hz-es alaphangjával rezeg!

Most a lemez végére egy M tömegű, pontszerűen kicsi súlyt rögzítünk és ismét megütjük a lemezt.

b) Írjunk fel olyan egyenleteket, amelyekből megkaphatók a lemez rezonanciafrekvenciái! Az egyenleteket nem kell megoldani. (Tanács: használjuk a $\mu = M/(M + m)$ paramétert, ahol $m = dwL\rho$ a lemez tömege.)

c) Számítsuk ki a lemez módusainak elhangolódását $M \ll m$ esetére! Mekkora tömegű súlyt kell az előbb tervezett „hangvilla” végére rögzíteni, hogy 5 Hz-cel elhangoljuk az alaphangját?

d) Melyek lennének a rendszer rezonanciafrekvenciái, ha M végtelen nagy lenne? Határozzuk meg az ehhez képesti „elhangolódás” mértékét $\infty > M \gg m$ -re!

e) Mekkora tömegű nehezékre van szükség, hogy az alaphangot egy oktávval (egy kvinttel, egy kvarttal) elhangoljuk? Hogyan változik meg eközben a többi módus frekvenciája?

(Szabó Attila)

12. Egymástól d távolságra vízszintesen elhelyezkedő két nagyon kis méretű csigára szimmetrikusan ráfektetünk egy L hosszúságú súlyos, hajlékony kötelet. A kötélen h mélységre lóg be. Vizsgáljuk a h belógás függését L és d függvényében! Mikor van stabil, mikor instabil egyensúlyi állapota a kötelnek? Mennyi lehet a kötélen minimális hossza egyensúlyban? Vizsgáljuk az $L/d \rightarrow \infty$ határesetet!

(Tichy Géza, Cserti József és Vigh Máté)

13. Vízszintes üveglapon szétterülve fekszik egy higanycsepp. Fele olyan magas, mint amilyen széles. Mennyi lehet a tömege? A higany illeszkedési szöge az üveghez: 138° .

(Radnai Gyula és Vigh Máté)

14. Egy gőzkabin mennyezete olyan anyagból készült, amit a víz tökéletesen nedvesít. A túltelített vízgőz hatására a kabin vízszintes mennyezetén apró vízcseppek képződnek. Vajon mi tartja ezeket a cseppeket? Adjuk meg a legnagyobb stabil (még éppen nem lecseppenő) vízcsepp h magasságát, azaz a csepp legalsó pontja és a mennyezet közötti távolságot a víz ρ sűrűségének, az α felületi feszültségnek és a g nehézségi gyorsulásnak a felhasználásával! Számítsuk ki h értékét számszerűen is!

(Vigh Máté)

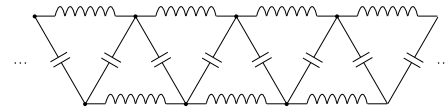
15. Egy σ felületi feszültségű, ρ sűrűségű és R sugarú kicsiny folyadékgömböt a felületi feszültség (illetve saját gravitációs tere) tart össze a világegyetem egy távoli pontjában. A folyadék sűrűdésmentesnek és összenyomhatatlannak tekinthető. Hogyan módosul a kis folyadékcsepp alakja, ha lassan (ω szögsebességgel) forog? Fogalmazzuk meg pontosabban, mit jelent az, hogy a csepp kicsiny, illetve hogy lassan forog!

(Kovács Áron)

16. A homogén és izotróp levegőben a hang u sebességgel terjed, és kielégíti a közönséges homogén hullámegyenletet. Térjünk át egy másik inerciarendszerre, amely valamilyen \mathbf{n} egységvektorral megadott irányban V sebességgel mozog a levegő nyugalmi rendszeréhez képest! Transzformáljuk át a hullámegyenletet az új vonatkoztatási rendszerbe, s írjuk fel a síkhullámok diszperziós relációját! Legyen most a két inerciarendszer relatív sebessége éppen az u hangsebesség! Írjuk fel a homogén hullámegyenletet az új rendszerben, vezessük le a diszperziós relációt, és adjuk meg az egyenlet általános megoldását! Vizsgáljuk meg az inhomogén hullámegyenletet is (azaz a hangkeltés problémáját), és számítsuk ki az egyenlet Green-függvényét! Végezzük el a számításokat a klasszikus fizika és a speciális relativitáselmélet alapján is!

(Dávid Gyula)

17. L induktivitású tekercsekkel és C kapacitású kondenzátorokkal az ábrán látható, mindkét irányban végtelen háromszögláncot építjük fel. Számítsuk ki a rendszer eredő impedanciáját ω körfrekvencián a lánc tetszőleges két pontja között! Vizsgáljuk meg a lánc egyenáramú viselkedését is! Van-e a rendszernek rezonanciafrekvenciája? Mi a helyzet, ha a kondenzátorokat és a tekercseket kicseréljük?



(Szabó Attila)

18. Egy nagyméretű, négyzet alakú földelt fémlemez egyik oldalélének közelében, az éltől adott távolságra, azzal párhuzamosan egy elektromosan töltött, jó hosszú fémszál található. Mikor hat nagyobb erő a szála, a) ha az a lemez síkjában fekszik, b) vagy ha a lemez síkjára merőleges, az oldalélre illeszkedő síkban található? Mekkora a két erő aránya?

(Gnädig Péter)

19. Vizsgáljunk egy R sugarú, ρ tömegsűrűségű, η vonalmenti töltéssűrűségű, végtelen hosszúságú fémhengert, melynek tengelyétől d távolságra egy rögzített földelt vezető sík helyezkedik el. Mekkora sebességgel fog a henger a síknak ütközni, ha a hengert kezdősebesség nélkül elengedjük, és a sugárzási effektusokat elhanyagoljuk? Adjunk becslést az ütközésig eltelt időre, ha $d \gg R$!

(Széchenyi Gábor)

20. Egy origó középpontú, R sugarú szupravezető gömbtől d távolságra egy kicsiny, \mathbf{m} momentumú mágneses dipólust helyezünk, a dipólusmomentum vektora merőleges a gömb középpontját a dipólussal összekötő szakaszra. Határozzuk meg a gömb és a dipólus között ható erőt! Vázoljuk fel ezt az erőt a d távolság függvényében! Feltételezhetjük, hogy a London-féle behatolási mélység zérus.

(Kovács Áron)

21. Két pontszerűnek tekinthető, m mágneses dipólmomentumú, J tehetetlenségi nyomatékú, függőleges tengelyű iránytűt egymástól d távolságra helyezünk el a Föld homogénnek és vízszintesnek tekinthető B_0 mágneses mezőjében. Az egyik iránytűt $\alpha_0 \ll 1$ szöggel kitérítjük, majd a rendszert magára hagyjuk. Írjuk le a rendszer viselkedését, ha az iránytűk
- egy függőleges egyenes mentén vannak;
 - egy (mágneses) észak–déli egyenes mentén vannak;
 - egy (mágneses) kelet–nyugati egyenes mentén vannak!
- Tegyük fel, hogy az iránytűk mágneses tere sokkal gyengébb, mint a Földé! Lesz-e olyan pillanat, amikor az elsőnek kitérített iránytű rezgése megáll? Ha igen, mikor, ha nem, mekkora lesz a legkisebb amplitúdó?

(Szabó Attila)

22. Vízszintesen elhelyezkedő, vékony falú, a sugarú, R ellenállású körgyűrű középpontja fölött h magasságból elejtünk egy m tömegű, és függőleges irányba mutató \mathbf{m}_0 mágneses momentumú dipólt. Írjuk le a mágneses dipól mozgását a gravitációs térben! Hanyagoljuk el a körgyűrű önindukcióját! Tegyük fel, hogy a mágneses dipól végig a gyűrű középpontján átmenő függőleges tengely mentén mozog!

(Cserti József)

23. Egy méhsejtrács minden rácspontjába azonos m nagyságú, klasszikusan viselkedő \mathbf{m}_i mágneses momentumot teszünk. A mágneses momentumok csak a három legközelebbi szomszédos rácsponton ülő mágneses momentum hatását érzik. A rendszer teljes energiája a legközelebbi szomszédok közötti kölcsönhatási energiák összege,

$$E = J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j,$$

ahol $\langle i,j \rangle$ azt jelöli, hogy az összegzés a legközelebbi szomszéd rácspontpárookra történik.

$J > 0$ esetén a rendszer energiája akkor minimális, ha a szomszédos rácspontokon a mágneses momentumok ellentétes irányban állnak, mondjuk a $+z$ és $-z$ irányban. Azok a rácspontok, melyeken a $+z$, illetve $-z$ irányú mágneses momentumok találhatóak, a méhsejtrács két alrácát alkotják.

Erre az állapotra úgy is tekinthetünk, hogy a mágneses momentumok ilyen beállása annak köszönhető, hogy az i -edik rácsponton a szomszédos mágneses momentumok egy

$$\mathbf{B}_i^{\text{eff}} = -\frac{\partial E}{\partial \mathbf{m}_i}$$

effektív mágneses teret hoznak létre, s az állítja be a mágneses momentumokat.

Ha a mágneses momentumokat kissé kimozdítjuk a $\pm z$ irányból, azok ebben az effektív térben precesszálni kezdenek az xy síkban, hiszen az \mathbf{m}_i mágneses momentummal egy $\mathbf{I}_i = \mathbf{m}_i/\gamma$ nagyságú impulzusmomentum jár együtt (ahol γ a giromágneses együttható), és a szomszédos mágneses momentumok a $\mathbf{B}_i^{\text{eff}}$ mágneses tér révén

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{m}_i \times \mathbf{B}_i^{\text{eff}}$$

forgatónyomatékkal hatnak az i -edik rácspontban lévő mágneses momentumra.

A szomszédos momentumok közötti csatolás miatt a mágneses momentumok nem függetlenül precesszálnak, hanem a precesszió térben és időben hullámként terjed mindkét alrácson. Ez a mágnesség elméletében fontos spinhullám klasszikus megfelelője.

a) Feltételezve, hogy a mágneses momentumoknak a $+z$, illetve $-z$ irányhoz képesti kimozdulása, az \mathbf{m}_i vektornak az m_i^x és m_i^y komponense kicsi a z komponenshez képest, határozzuk meg, hogy a térben \mathbf{k} hullámszámmal terjedő hullámhoz mekkora $\omega_{\mathbf{k}}$ frekvencia tartozik!

b) Mutassuk meg, hogy az ehhez a klasszikus spinhullámhoz tartozó energia úgy írható fel, mint két, $\omega_{\mathbf{k}}$ frekvenciájú harmonikus módus energiája, melyekben a két alrácson mágneses momentumainak az xy síkbeli, precesszálo komponensei keverednek össze!

c) Véges hőmérsékleten, ahol ezek a hullámok termikusan gerjeszthetők, határozzuk meg termikus egyensúlyban az xy síkbeli precesszálo komponens amplitúdóját mindkét alrácson!

d) Feltéve, hogy véges hőmérsékleten minden, a periodikus határfeltétel által megengedett \mathbf{k} hullámszámvektorú módus jelen van, határozzuk meg a vezető rendű korrekciót a mágneses momentumok z komponensének rövidüléséhez a két alrácson!

e) Mutassuk meg, hogy ez a rövidülés bármilyen véges hőmérsékleten végtelen nagynak adódik ebben a közelítésben egy nagy rendszerben, ahol a \mathbf{k} vektor folytonos változóként vehető, vagyis a mágneses momentumok termikus mozgása olyan erős, hogy az alapállapotban rendezett mágneses momentumok tetszőleges véges hőmérsékleten rendezetlen állapotba kerülnek!

(Sólyom Jenő)

24. A Nordström-féle (speciális) relativisztikus gravitációelméletben egy részecske mozgásegyenlete a következő: $d(Mu_k)/d\tau = M \partial_k \Phi$, ahol M a részecske (nyugalmi) tömege, u_k a négyessebesség vektora, τ a részecske sajátideje, Φ pedig a Nordström-féle gravitációs potenciál.
- Írjuk fel a részecske négyesgyorsulására vonatkozó formulát!
 - Tételezzük fel, hogy (egy adott inerciarendszerben) a Φ gravitációs potenciál nem függ az időtől, csak a helytől! Keressük meg a mozgásegyenletek energiamegmaradást kifejező első integrálját!
 - Vizsgáljuk meg a függőleges szabadesés problémáját a Nordström-elméletben: legyen a Φ gravitációs potenciál egyszerűen $\Phi = gz$, ahol z a függőleges koordináta, g pedig egy gyorsulás-dimenziójú állandó! Induljon a részecske H magasságból, nulla kezdősebességgel! Számítsuk ki, mennyi idő múlva és mekkora sebességgel fog a részecske talajt érni! Mennyi sajátidőt mér ezalatt a részecskével együtt mozgó óra?
 - Vizsgáljuk meg a nemrelativisztikus határesetet is, és hasonlítsuk össze a newtoni megoldással! Milyen körülmények között válik kimutathatóvá a relativisztikus megoldás eltérése a newtonitól?

(Dávid Gyula)

25. Tekintsünk egy két dimenziós, nagyon nagy méretű, négyzetes struktúrájú, áteresztő típusú optikai rácsot! Legyen a rácsállandó $d = (K + 1/2)\lambda$, ahol K egy egész szám, λ pedig a merőlegesen beeső megvilágító monokromatikus fénysugár hullámhossza! Fraunhofer-határesetben a nagyon messze található, de minden lehetséges irányt lefedő ernyőn jó közelítéssel egy négyzetrács csúcspontjaiban jelennek meg a főmaximumoknak megfelelő éles fénypontok. Azaz például $K = 1$ -re 9 darab, $K = 2$ -re 21 pötty. Természetesen ha α szöggel elfordítjuk az optikai rácsot a beeső fény iránya mint tengely körül, akkor a diffrakciós kép is ugyanennyit fordul.

a) Helyezzünk most két ilyen egyforma négyzetes optikai rácsot egymás mögé: legyenek egymáshoz nagyon közel, azaz az áteresztőképesség minden pontban a két rács áteresztőképességének szorzata! A két rács egymáshoz képest legyen tetszőleges α szöggel elforgatva!

Milyen lesz a diffrakciós kép? Hol fogunk pöttyöket látni, hány darabot? Ábrázoljuk konkrétan $K = 2$ esetén a látható pöttyök számát α függvényében! Vácoljuk fel a látható diffrakciós képet α nagyon kis értékének határesetében!

b) Szintén egymás mögé helyezzük a két négyzetes rácsot, ezúttal párhuzamosn, de tegyük fel, hogy rácsállandójuk egy kicsit különbözik (például gyártási hiba miatt): egyik rács a másiknak $(1 + \beta)$ -szoros nagyítása! Hogy néz ki ekkor a diffrakciós kép? Van-e hasonlóság az a) esettel, és ha igen, miért?

(Varga Dezső)

26. A klasszikus statisztikus fizika egyik közismert eredménye pl. az N darab lineáris harmonikus oszcillátorból álló rendszer termodinamikai leírása. Egyetlen ilyen módon kötött részecske Hamilton-függvénye

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \quad (1)$$

alakú, ahol x és p a rendszer ún. normálkoordinátája, ill. a hozzá tartozó impulzus. Ezzel a kiinduló feltétellel a szokványos módon kiszámítható pl. adott számú részecskéből álló, egyensúlyban lévő gáz U energiája, F szabadenergiája, S entrópiája, c_v fajhője, stb. A valóságban azonban – a vártnál talán jóval többször is – a Hamilton-függvény nem írható a fenti kvadratikus alakba (és az egzotikus dolgokat még nem is említettük, lásd akár a vonatkozó wikipédia szócikket). Egy (persze még messze nem reális, de a valóságos gázokhoz, kristályokhoz) talán ennél jobban közelítő esetet, mint egyfajta korrekciót véve tekintsük a következőkben a

$$H = \frac{p^2}{2m} + \gamma \left(1 - \cos 2\pi \frac{x}{a}\right) \quad (2)$$

x -ben periodikus Hamilton-függvénnyel jellemzett rendszert!

a) Vegyünk N részecskét, válasszuk meg a γ paraméter értékét úgy, hogy (az összevetés kedvéért) az jól illeszkedjen az (1) egyenlettel adott ideális eset k (rugó)állandójához, majd klasszikus fizikai módszerekkel számítsuk ki a fenti U , F , S , c_v (és/vagy bármely más, érdekesnek vélt) mennyiségek hőmérsékletfüggését, végül ezeket a mennyiségeket ábrázolva indokoljuk meg, hogy az alapesethez (tehát lényegében az ekvipartícióhoz) képest tapasztalt eltérések legalább intuitív módon indokolhatóak-e!

Megjegyzés: Egy ilyen, lényegében az összes valódi kvantumum effektust (nullponti energia, alagutazás) nélkülöző leegyszerűsített modelltől ne várjunk sokat, a durva képből adódhatnak végső soron inkorrekt tendenciák is! Ezeket szűrjük ki! A Bessel-függvények ismerete jól jöhet.

b) Az ilyen (vagy ehhez hasonló) oszcilláló potenciál esetén ismeretes az alapprobléma (energiaszintek) kvantummechanikai tárgyalása is (ha nincs jobb forrás, akkor lásd pl. a

www-personal.umi.ch/~jbourj/cm/homework%203.pdf

címen – nem egyszerű!). Tudunk-e ezzel (véges munkával és időn belül) érdemben finomítani valamit a fenti, még mindig lényegében *klasszikus* eredményeken?

(Magyar Péter)

27. Tudjuk, hogy a Heisenberg-féle felcserélési reláció a kvantummechanikai operátorokat reprezentáló véges mátrixokkal nem elégíthető ki (ha nem tudjuk, bizonyítsuk be!). Miért használnak mégis a nanofizikában (pl. a grafén tulajdonságainak leírására) véges, olykor egészen kis méretű, pl. 2×2 -es mátrixokat? Nem vezet ez ellentmondásra a kvantumelmélet alapfeltevésével?

(Dávid Gyula)

28. Adott egy fiktív kétatomos elemi cellájú négyzetrács a_0 rácsállandóval. A két atom egy-egy gyengén kötött elektronjának energiadiszperziója: $\varepsilon(\mathbf{k}) = \pm\gamma\sqrt{2 + \cos(k_x a_0) + \cos(k_y a_0)}$, (γ állandó, minden zérusnál kisebb energiájú állapot be van töltve). Tekerjük fel ezt a rácsot úgy, hogy az $\mathbf{R}_{n,m} = a_0(n, m)$ rácspontra kerüljön az origóval! Hanyagoljuk el a görbületes hatásokat! Mi lesz az új rács energiadiszperziója? Milyen esetben lesz vezető? Vizsgáljunk meg a speciális eseteket, amikor $n = m$, vagy $m = 0$, és vázoljunk fel a diszperziós relációt néhány esetben!

(Kukucska Gergő)

29. Egyes szerves festékanyagok (pigmentek) olyan lineáris láncokból épülnek fel, amelyek mentén az elektronok lényegében szabadon mozoghatnak. Ezek az ionok úgy származtathatók, hogy egy páros szénatom-számú polietilén molekulából eltávolítunk egy $(\text{CH})^+$ csoportot. Egy ilyen jellegű ionban a kötések úgy rendeződnek át, hogy végül kialakul a következő típusú lineáris struktúra:



amely *páratlan* számú, egymástól $d = 0,14$ nm távolságra egyenletesen elhelyezkedő szénatomot tartalmaz. Ebben a struktúrában úgy vehetjük, hogy az eredeti molekula kettős kötéseiből $n+1$ darab elektron (ahol n páros egész szám) egymástól függetlenül változtatja a helyét egy egydimenziós, $L_n = nd$ jellemző méretű potenciálban.

a) Alkossunk egyszerű modellt a potenciálról, majd határozzuk meg egy benne mozgó elektron ϵ_k energiaszintjeit! Konkrétan adjuk meg az alap- és az első gerjesztett állapot E_0 és E_1 energiáját a többielektronos molekula együttesére nézve! Mekkora a rendszer alapállapotából az első gerjesztett állapotba való átmenet során elnyelt foton λ_n hullámhossza?

b) A kísérletekben azt figyelhetjük meg, hogy pl. az $n = 9$ ($n = 11$) vagy az $n = 13$ jelű ionok elnyelési színekvonalai a spektrum kék ($\lambda_9 \approx 470$ nm), (narancssárga) illetve vörös ($\lambda_{13} \approx 730$ nm) tartományába esik. Összhangban van ezzel az általunk tekintett modell? Kell-e finomítani a modellen?

c) Vajon mely n értékekre *színesek* a fenti eljárással preparált ionok? Milyen általános tendenciákat tudunk megállapítani?

(Magyar Péter)

30. Két különböző anyagú, de azonos d vastagságú, végtelen lapot egymásra helyezünk. Az elektron háromdimenziós mozgását a két tartományban kvantummechanikailag a $\hat{H} = \hat{\mathbf{p}} \frac{1}{2m(z)} \hat{\mathbf{p}}$ Hamilton-operátor írja le, ahol $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ az elektron impulzus-operátora, és a két tartományban az elektron effektív tömege $m(z) = m_1$, ha $z < 0$ és $m(z) = m_2$, ha $z \geq 0$. A z tengely a lapok síkjára merőleges. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a bezáró potenciál: $V(z) = 0$, ha $|z| < d$ és $V(z) = \infty$, ha $|z| \geq d$. Határozzuk meg a rendszer energiaszintjeit (Landau-szintjeit) z irányú homogén mágneses térben!

(Cserti József és Széchenyi Gábor)

31. *Határ a csillagos ég!* Széles körben elterjedt a híre, hogy leszámolva a korábbi csillagközi menekülő útvonalakkal (az elfogult EU-s tudósok által proponált féregjáratok, csillagkapu, párhuzamos világok, stb.) a Magyar Nemzeti Űrkutatás a közeljövőben egy olyan titkos, unortodox, itt nem részletezett technológiai fejlesztéssel rukkol elő, amely lehetővé teszi a c fénysebességhez közeli, vagy azzal legalább összemérhető sebességgel huzamosabb ideig fenntarthatóan haladó űrrakéta megépítését. Kiszivárgott a kilövés helye is: állítólag egy Fejér megyei kistelephelyre tervezik, és kisvasút szállítja majd a helyszínre a gépelemeket. Sajnos a bulvársajtó azonnal lecsapott a Kitörés Évében (2014) esedékes eme ígéretes kísérletre, és a már-már megszokott földhöz ragadt retorikával, egyes – nevüket nem vállaló – tudósokat citálva naívan azzal érvelt, hogy egy ilyen küldetés során az űrhajóra a v utazósebességgel egyre erősödő fékező erők hatnának, köztük a frontális fotonütközések alkalmával akár „végtelen” energiát átadó kölcsönhatás (az ún. fotongát), illetve az űrhajó útjába kerülő anyagi részecskékkel való sorozatos találkozások. Ezek a folyamatok olyan nagyságrendű energiát vonnának el a rakétától, hogy – ha más nem is – ez eleve megkérdőjelezné a célba érés sikerét. Nem késett sokat az ihletett válasz sem: a sértett szponzorált kutatók hangoztatták, hogy a Vörös Csillag kihunyása óta nincs komoly ellenerő, ellenzék vagy más fékező hatás a Galaxisban. Álljuk útját a kibontakozó parttalan vitának, és próbáljuk meg eldönteni a következő állítás igaz vagy hamis voltát: Egy nyugalomban lévő megfigyelőhöz képest izotróp sugárzási térben (a világűrben) v ($\rightarrow c$) sebességgel mozgó rakétára ható P_v sugárnyomás lehet-e komoly akadálya egy ilyen elképzelt utazásnak? Mit mondhatunk a mikrorészecskék ellenáramáról? Ellenőrizzük a számítást: visszkapjuk-e a $v = 0$ esetben az ismert képletet? Adjuk meg az eredményt a $v = 0,5c$, $v = 0,9c$ és $v = 0,99c$ esetekre! Mit mutat a $v \rightarrow c$ határeset? A számszerű becsléshez használjuk irodalmi adatokat!

(Magyar Péter)

\end{document}